Module Hopf. Teorema fundamentală pentru module Hopf.

Definiție Fie H = bialgebră. S.n. <u>Hopf modul (drept, drept)</u> peste H un triplet $(M, \cdot, \rho)$, unde M este un k-modul a.î. $(M, \cdot) \in \mathcal{M}_H$ este H-modul drept, $(M, \rho) \in \mathcal{M}^H$ este H-comodul drept ($\rho(m) \overset{not}{=} m_{<0>} \otimes m_{<1>}$) a.î. are loc următoarea compatibilitate

$$\rho(m \cdot h) = m_{<0>} \cdot h_{(1)} \otimes m_{<1>} h_{(2)} \qquad (H)$$

$(\forall)\, m \in M,\ h \in H$.

Evident $(H, \cdot := M_H, \rho := \Delta_H)$ este un Hopf modul. Dacă $M = (M, \cdot, \rho_M)$ și $N = (N, \cdot, \rho_N)$ sunt două Hopf module (dr, dr) o aplicație k-liniară $f : M \to N$ s.n. <u>morfism de Hopf module</u> dacă este simultan morfism de H-module și H-comodule.

$$\mathrm{Hom}_H^H(M, N) \overset{def}{:=} \{ f : M \to N \mid f \text{ morfism de Hopf module} \}$$

$\mathcal{M}_H^H \overset{not}{:=}$ <u>categoria</u> Hopf modulelor (drepte, drepte).

<u>observații și comentarii</u>

1) Vom vedea că $\mathcal{M}_H^H$ va avea <u>numeroase generalizări</u> în teoria algebrelor Hopf. Una dintre ele este următoarea :

Fie H = bialgebră și $L \subseteq H$ subbialgebră în H.
Putem defini analog categoria $\mathcal{M}_L^H$, numai că aici $(M, \cdot) \in \mathcal{M}_L$ va fi doar L-modul drept, iar compatibilitatea (H) are forma:

$$\rho(m \cdot l) = m_{<0>} \cdot l_{(1)} \otimes m_{<1>} l_{(2)}, \quad (\forall) m \in M, l \in L$$

Categoria $\mathcal{M}_L^H$ joacă rol cheie în demonstrarea teoremei lui Lagrange pentru algebre Hopf: "dacă H e algebră <u>Hopf f. dimensională</u> și $L \subseteq H$ o subalgebră Hopf în H $\Rightarrow$ H este L-modul <u>liber</u> și $\dim_k(L) \mid \dim_k(H)$" (teorema Nichols-Zoller).

2) (<u>reinterpretarea compatibilității (H)</u>).

a) Dacă $N \in \mathcal{M}_H \Rightarrow N \otimes H \in \mathcal{M}_H$ cu

$$(n \otimes h) \cdot g \overset{def}{:=} n g_{(1)} \otimes h g_{(2)}, \quad (\forall) n \in N, h, g \in H$$

În particular, $M \otimes H \in \mathcal{M}_H$ cu această acțiune $(\forall)\, M \in \mathcal{M}_H^H$.
Atunci, compatibilitatea (H) este echivalentă cu:
<u>$\rho : M \longrightarrow M \otimes H$ e morfism de H-module drepte</u>

b) Mai mult, dacă $M \in \mathcal{M}^H \Rightarrow M \otimes H \in \mathcal{M}^H$ via

$$\rho_{M \otimes H}(m \otimes h) := m_{<0>} \otimes h_{(1)} \otimes m_{<1>} h_{(2)}$$

$(\forall)\, m \in M, h \in H$. (Exercițiu!)

Cu această structură de H-comodul a lui $M \otimes H$ compatibilitatea (H) are loc $\Longleftrightarrow$

$\cdot : M \otimes H \longrightarrow M$ e morfism de H-comodule

În adevăr, $\cdot : M \otimes H \longrightarrow M$ este H-coliniară $\Longleftrightarrow$ diagrama

$$\begin{tikzcd} M \otimes H \arrow[r, "\cdot"] \arrow[d, "\rho_{M\otimes H}"'] & M \arrow[d, "\rho"] \\ M\otimes H\otimes H \arrow[r, "\cdot\otimes Id_H"] & M\otimes H \end{tikzcd}$$

e comutativă

i.e. $\rho(m\cdot h) = m_{<0>}\cdot h_{(1)} \otimes m_{<1>} h_{(2)}$, i.e. (H).

3) Folosind interpretările de mai sus putem defini încă trei categorii: ${}^H_H\mathcal{M}$, ${}_H\mathcal{M}^H$ și ${}^H\mathcal{M}_H$ astfel

• $\underline{{}^H_H\mathcal{M}} \ni (M, \cdot, \rho)$ cu $(M,\cdot) \in {}_H\mathcal{M}$, $(M,\rho) \in {}^H\mathcal{M}$ a.î. $\rho : M \longrightarrow H \otimes M$ e morfism în ${}_H\mathcal{M}$ i.e.

$$\underline{\rho(h\cdot m) = h_{(1)} m_{<-1>} \otimes h_{(2)}\cdot m_{<0>}}, \qquad (H_1)$$

$(\forall)$ $h \in H$, $m \in M$.

• $\underline{{}_H\mathcal{M}^H} \ni (M, \cdot \rho)$ unde $(M,\cdot) \in {}_H\mathcal{M}$, $(M,\rho) \in \mathcal{M}^H$ și $\rho : M \longrightarrow M \otimes H$ e morfism în ${}_H\mathcal{M}$ i.e.

$$\underline{\rho(h\cdot m) = h_{(1)}\cdot m_{<0>} \otimes h_{(2)} m_{<1>}}, \qquad (H_2)$$

$(\forall)$ $h \in H$, $m \in H$.

• ${}^{H}\mathcal{M}_H \ni (M, \cdot, \rho)$ a.î. $(M, \cdot) \in \mathcal{M}_H$, $(M, \rho) \in {}^{H}\mathcal{M}$

și $\rho : M \longrightarrow H \otimes M$ este H-liniară i.e.

$$\rho(m \cdot h) = m_{<-1>} h_{(1)} \otimes m_{<0>} \cdot h_{(2)} \qquad (H3)$$

$(\forall)\, m \in M$, $h \in H$.

Exercițiu: Fie H = algebră Hopf cu antipodul S bijectiv. Atunci există un izomorfism de categorii

$$\mathcal{M}_H^H \simeq {}_H^H\mathcal{M} \simeq {}_H\mathcal{M}^H \simeq {}^H\mathcal{M}_H .$$

Indicație: Treceți toate structurile de H-modul/comodul dintr-o parte în alta folosind S (asta va fi primul functor) și în cealaltă parte (inversul functorului) folosind S^{-1}. ▨

Exemple de module Hopf.

1) $H \in \mathcal{M}_H^H$ cu $\cdot := M_H$, $\rho := \Delta_H$.

2) Dacă $V \in \mathcal{M}_k$ este k-modul $\Longrightarrow V \otimes H \in \mathcal{M}_H^H$ via:

$$\begin{cases} (v \otimes h) \cdot g := v \otimes hg & (1) \\ \rho_{V \otimes H}(v \otimes h) := v \otimes h_{(1)} \otimes h_{(2)} & (2) \end{cases}$$

(Exercițiu) $V \otimes H$ cu aceste două structuri s.n. modulul Hopf trivial.

Exercițiu: Arătați că asocierea $V \longmapsto V \otimes H$ definește un functor covariant

$$- \otimes H : \mathcal{M}_k \longrightarrow \mathcal{M}_H^H$$

O să arătăm (teorema fundamentală pentru module Hopf) că acest functor este echivalență de categorii dacă H e algebră Hopf, i.e. că orice modul Hopf este izomorf cu unul trivial!

O metodă generală de a construi module Hopf este următoarea:

Teoremă (adjuncția unitarilor) Fie H = bialgebră.

Atunci:

a) Functorul uituc

$$\mathcal{M}_H^H \xrightarrow{U^H} \mathcal{M}_H \overset{-\otimes H}{\dashrightarrow} \mathcal{M}_H^H$$

are un adjunct la dreapta construit astfel:

dacă $N \in \mathcal{M}_H \Longrightarrow N \otimes H \in \mathcal{M}_H^H$ via:

$$\begin{cases} (n \otimes h) \cdot g := n g_{(1)} \otimes h g_{(2)} & (3) \\ \rho_{N \otimes H}(n \otimes h) := n \otimes h_{(1)} \otimes h_{(2)} & (4) \end{cases}$$

$(\forall)$ $n \in N$, $h, g \in H$.

b) Functorul uituc

$$\mathcal{M}^H \overset{-\otimes H}{\dashrightarrow} \mathcal{M}_H^H \xrightarrow{U_H} \mathcal{M}^H$$

are un adjunct la stânga: dacă $M \in \mathcal{M}^H$

$\Longrightarrow M \otimes H \in \mathcal{M}^H_H$ via

$$\begin{cases} (m \otimes h) \cdot g := m \otimes hg & (5) \\ \rho_{M\otimes H}(m \otimes h) := m_{<0>} \otimes h_{(1)} \otimes m_{<1>} h_{(2)} & (6) \end{cases}$$

$(\forall)\ m \in M,\ h, g \in H.$

<u>Dem</u>: Las ca <u>exercițiu</u> demonstra tuturor detaliilor elementare (asocierile sunt functori, obiectele construite cu (3)+(4) și (5)+(6) sunt module Hopf, etc.). Vom indica doar unitatea și counitatea adjuncțiilor.

a) Adjuncție $U^H \dashv - \otimes H$

- <u>unitatea</u>: $M \in \mathcal{M}^H_H$ atunci $\eta_M : M \longrightarrow M \otimes H$, $\eta_M(m) := \rho_M(m) = m_{<0>} \otimes m_{<1>}$
- <u>counitatea</u>: $N \in \mathcal{M}_H$ $\varepsilon_N : N \otimes H \longrightarrow N$, $\varepsilon_N(n \otimes h) := \varepsilon_H(h)\, n.$

b) Adjuncție $- \otimes H \dashv U_H$

- <u>unitatea</u>: $N \in \mathcal{M}^H$, $\eta_N : N \longrightarrow N \otimes H$ $\eta_N(n) := n \otimes 1_H$
- <u>counitatea</u>: $M \in \mathcal{M}^H_H$, $\varepsilon_M : M \otimes H \longrightarrow M$ $\varepsilon_M(m \otimes h) := m \cdot h$

$(\forall)\ m \in M,\ h \in H.$ $\square$

Observație : $H \otimes H \in \mathcal{M}_H^H$ în două moduri, unul cu ajutorul structurilor (3)+(4) și altul cu (5H)

i.e. $H \otimes H \in \mathcal{M}_H^H$ via :

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} (h \otimes g) \cdot l := h\, l_{(1)} \otimes g\, l_{(2)} \\ h \otimes g \xmapsto{\rho} h \otimes g_{(1)} \otimes g_{(2)} \end{cases} \qquad (\mathrm{II}) \begin{cases} (h \otimes g) \cdot' l := h \otimes g l \\ h \otimes g \xmapsto{\rho'} h_{(1)} \otimes g_{(1)} \otimes h_{(2)} g_{(2)} \end{cases}$$

Exercițiu Fie H = algebră Hopf. Atunci

$$\varphi : (H \otimes H, \cdot, \rho) \xrightarrow{\sim} (H \otimes H, \cdot', \rho')$$

$$\varphi(h \otimes g) := h\, g_{(1)} \otimes g_{(2)}$$

este izomorfism de module Hopf cu inversul

$$\varphi^{-1}(h \otimes g) = h\, S(g_{(1)}) \otimes g_{(2)}.$$

Exercițiu Fie H = algebră Hopf și $H \otimes H \in \mathcal{M}_H^H$ via (I). Arătați că există o adjuncție :

$$\mathcal{M}_H \xrightarrow{- \otimes H} \mathcal{M}_H^H \xrightarrow{\mathrm{Hom}_H^H(H \otimes H, -)} \mathcal{M}_H$$

• Teorema fundamentală pentru module Hopf.

Fie H = bialgebră și $M \in \mathcal{M}_H^H$. Definim

$$M^{co(H)} := \{ m \in M \mid \rho(m) = m \otimes 1_H \} \leq_k M$$

n.n. subspațiu de coinvarianți ai lui M.

Asocierea $M \longmapsto M^{co(H)}$ definește un functor

$$(-)^{co(H)} : \mathcal{M}_H^H \longrightarrow \mathcal{M}_k = Vect_k.$$
$$M \longmapsto M^{co(H)}.$$

In adevăr, dacă $f : M \longrightarrow N$ e morfism în $\mathcal{M}_H^H$ și $m \in M^{co(H)} \Rightarrow$

$$\rho_N(f(m)) = f(m)_{<0>} \otimes f(m)_{<1>} = (f = \text{colinear})$$
$$= f(m_{<0>}) \otimes m_{<1>} =$$
$$= f(m) \otimes 1_H$$

i.e. $\underline{f(m) \in N^{co(H)}}$ și deci putem defini

$$(f)^{co(H)} := f|_{M^{co(H)}}.$$

Exemple 1) Fie $H = (H, \cdot, \Delta) \in \mathcal{M}_H^H$. Atunci $\underline{H^{co(H)} \overset{?}{=} k1_H}$. In adevăr, fie $\underline{h \in H^{co(H)}} \Rightarrow$

$$\rho(h) = \Delta(h) = h_{(1)} \otimes h_{(2)} = h \otimes 1_H \overset{\varepsilon \otimes Id}{\Longrightarrow}$$

$\Rightarrow h = \varepsilon(h_{(1)}) h_{(2)} = \varepsilon(h) 1_H \Rightarrow h \in k1_H$ i.e.

$H^{co(H)} \subseteq k1_H$ iar reciproc e banal.

2) Fie $V \in \mathcal{M}_k$ şi $V \otimes H \in \mathcal{M}_H^H$ modul Hopf trivial. Atunci

$$\underline{(V\otimes H)^{co(H)} \overset{?}{=} \{ v \otimes 1_H \mid v \in V \} \simeq V}$$

"$\supseteq$" $v \otimes 1_H \in (V \otimes H)^{co(H)}$ căci $\rho_{V\otimes H}(v \otimes 1_H) = v \otimes \Delta(1_H) = \underline{v \otimes 1_H} \otimes 1_H$

"$\subseteq$" Fie $z = \sum_{i=1}^{t} v_i \otimes h_i \in (V \otimes H)^{co(H)} \Longrightarrow$

$$\rho_{V\otimes H}(z) = z \otimes 1_H \Longrightarrow \sum_{i=1}^{t} v_i \otimes h_{i_{(1)}} \otimes h_{i_{(2)}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{t} v_i \otimes h_i \otimes 1_H \xRightarrow{I\otimes\varepsilon\otimes I}$$

$$z = \sum_{i=1}^{t} v_i \otimes h_i = \sum_{i=1}^{t} v_i \otimes \varepsilon(h_i) 1_H = \left(\sum_{i=1}^{t} v_i\, \varepsilon(h_i) \right) \otimes 1_H$$

i.e. $z \in \{ v \otimes 1_H \mid v \in V \}$.

<u>Reformulare</u>: Dacă $V \in \mathcal{M}_k$ e k-spațiu vectorial $\Longrightarrow$

$$\eta_V : V \xrightarrow{\sim} (V \otimes H)^{co(H)}, \quad \eta_V(v) := v \otimes 1_H$$

este <u>izomorfism</u> de k-spații vectoriale.

În adevăr, mai sus am arătat că η_V este <u>surjectiv</u>, şi în mod banal η_V e injectiv:

$$\eta_V(v) = \eta_V(w) \Rightarrow v \otimes 1_H = w \otimes 1_H \xRightarrow{1\otimes\varepsilon} v = w.$$

$\square$

Exercițiu Fie H = bialgebră. Atunci functorii

$$\mathcal{M}_k \xrightarrow{-\otimes H} \mathcal{M}_H^H \xrightarrow{(-)^{co(H)}} \mathcal{M}_k$$

formează o pereche de functori adjuncți cu $-\otimes H \dashv (-)^{coH}$.

- unitatea adjuncției: $V \in \mathcal{M}_k$

$$\eta_V : V \xrightarrow{\sim} (V\otimes H)^{co(H)}, \quad \eta_V(v) := v\otimes 1_H$$

$(\forall)\, v\in V$ e izomorfism.

- counitatea adjuncției: $M \in \mathcal{M}_H^H$

$$\varepsilon_M : M^{co(H)} \otimes H \longrightarrow M$$

$$\varepsilon_M(m'\otimes h) := m'\cdot h,$$

$(\forall)\, m' \in M^{co(H)},\ h\in H$. ▨

Teoremă (fundamentală pentru module Hopf).
Fie H = algebră Hopf și $M\in \mathcal{M}_H^H$. Atunci

$$\varepsilon_M : M^{co(H)}\otimes H \xrightarrow{\sim} M, \quad \varepsilon_M(m'\otimes h) := m'\cdot h,$$

este un izomorfism de module Hopf.
In particular,

a) Orice modul Hopf M este liber ca H-modul drept și $\mathrm{rang}_H(M) = \dim_k(M^{co(H)})$

b) Functorii $\begin{tikzcd} \mathcal{M}_k \arrow[r, bend left, "-\otimes H"] \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \mathcal{M}_H^H \arrow[l, bend left, "(-)^{co(H)}"] \end{tikzcd}$ formează o echivalență de categorii

<u>Dem</u>: Fie $M \in \mathcal{M}_H^H$ și

$$\varepsilon_M : M^{co(H)} \otimes H \longrightarrow M, \quad \varepsilon_M(m' \otimes h) = m' \cdot h$$

$(\forall)\ m' \in M^{co(H)}$, $h \in V$.

<u>Vrem</u>: ε_M e izomorfism. O să construim inversul lui ε_M. Mai întâi, definim

$$P : M \longrightarrow M, \quad \underline{P(m) := m_{\langle 0\rangle} \cdot S(m_{\langle 1\rangle})},$$

$(\forall)\ m \in M$.

<u>Afirm</u>: $\mathrm{Im}(P) \subseteq M^{co(H)}$. În adevăr,

$$\underline{\rho(P(m))} = \rho\left(m_{\langle 0\rangle} \cdot S(m_{\langle 1\rangle})\right) \overset{(H)}{=}$$

$$= m_{\langle 0\rangle\langle 0\rangle} \cdot S(m_{\langle 1\rangle})_{(1)} \otimes m_{\langle 0\rangle\langle 1\rangle} S(m_{\langle 1\rangle})_{(2)}$$

$=$ (S e antimorfism de coalgebre)

$$= \underset{\langle 0\rangle}{m_{\langle 0\rangle\langle 0\rangle}} \cdot S(\underset{\langle 3\rangle}{m_{\langle 1\rangle(2)}}) \otimes \underset{\langle 1\rangle}{m_{\langle 0\rangle\langle 1\rangle}} S(\underset{\langle 2\rangle}{m_{\langle 1\rangle(1)}})$$

$$= m_{\langle 0\rangle} \cdot S(\underset{\langle 2\rangle}{m_{\langle 3\rangle}}) \otimes \underline{\underset{\langle 1\rangle(1)}{m_{\langle 1\rangle}} S(\underset{\langle 1\rangle(2)}{m_{\langle 2\rangle}})}$$

$$\overset{(A)}{=} m_{\langle 0\rangle} \cdot S(m_{\langle 2\rangle}) \otimes \underline{\varepsilon(m_{\langle 1\rangle})} 1_H$$

$$\overset{(C4)}{=} m_{\langle 0\rangle} \cdot S(m_{\langle 1\rangle}) \otimes 1_H = \underline{P(m) \otimes 1_H}$$

i.e. $P(m) \in M^{co(H)}$. Are sens să definim

$$\varepsilon_M^{-1} : M \longrightarrow M^{co(H)} \otimes H$$

$$\underline{\varepsilon_M^{-1}(m) := P(m_{<0>}) \otimes m_{<1>}} =$$

$$= m_{<0>} \cdot S(m_{<1>}) \otimes m_{<2>}$$

• $(\varepsilon_M, \varepsilon_M^{-1})$ sunt inverse una alteia:

$$(\varepsilon_M \circ \varepsilon_M^{-1})(m) = \left(m_{<0>} \cdot S(m_{<1>})\right) \cdot m_{<2>} =$$

$$= m_{<0>} \cdot \left(S(\underset{<1>(1)}{m_{<1>}}) \underset{<1>(2)}{m_{<2>}} \right) \overset{(A)}{=}$$

$$= m_{<0>} \cdot \varepsilon(m_{<1>}) 1_H = \underline{m} \text{ şi deci } \varepsilon_M \circ \varepsilon_M^{-1} = Id$$

$$(\varepsilon_M^{-1} \circ \varepsilon_M)(m' \otimes h) \overset{?}{=} m' \otimes h, \ (\forall)\, m' \in M^{co(H)}, h \in H$$

Mai întâi observăm că pentru $m' \in M^{co(H)} \Longrightarrow$

$$\rho(m') = m' \otimes 1_H \overset{(H)}{\Longrightarrow} \underline{\rho(m' \cdot h) = m' \cdot h_{(1)} \otimes h_{(2)}}$$

Avem:

$$(\varepsilon_M^{-1} \circ \varepsilon_M)(m' \otimes h) = \varepsilon_M^{-1}(m' \cdot h) = P(m' \cdot h_{(1)}) \otimes h_{(2)}$$

$$= m' \cdot \underline{h_{(1)} S(h_{(2)})} \otimes h_{(3)} \overset{(A)}{=} m' \varepsilon(h_{(1)}) 1_H \otimes h_{(2)}$$

$= m' \otimes h$ şi deci $\varepsilon_M, \varepsilon_M^{-1}$ sunt inverse una alteia şi morfisme de module Hopf

(Exercițiu!)

În final, dacă $M \in \mathcal{M}_H^H$ şi X o bază în $M^{co(H)}$ i.e. $M^{co(H)} \simeq k^{(X)} \Longrightarrow$

$$M \simeq M^{co(H)} \otimes H \simeq k^{(X)} \otimes_k H \simeq (k \otimes_k H)^{(X)} \simeq$$

$\simeq H^{(X)}$, izo de H-module drepte

$\Rightarrow M$ e H-modul drept liber de rang egal $\dim_k(M^{co(H)})$. $\boxtimes$

<u>Observații</u>: 1) Analog se poate arăta că există o echivalență de categorii ${}_H^H\mathcal{M} \simeq {}_k\mathcal{M}$.

Pentru a arăta echivalențele ${}_H\mathcal{M}^H \simeq {}_k\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}_H^H$ avem nevoie ca antipodul S să fie <u>bijectiv</u>. De exemplu, pentru categoria ${}_H\mathcal{M}^H$ inversa aplicației $\varepsilon_M : M^{co(H)} \otimes H \to M$ este dată de formula

$$\varepsilon_M^{-1}(m) := S^{-1}(m_{<1>}) \cdot m_{<0>} \otimes m_{<2>}, \ (\forall)\, m \in M$$

2) (Ion Bogdan) Se poate demonstra o reciprocă a punctului b) care are următorul enunț: "dacă H e o <u>bialgebră</u> a.î. functorii $\mathcal{M}_k \underset{(-)^{co(H)}}{\overset{-\otimes H}{\rightleftarrows}} \mathcal{M}_H^H$ formează o echivalență de categorii $\Rightarrow H$ este algebră Hopf".

• <u>Reprezentabilitatea functorului</u> $(-)^{co(H)} : \mathcal{M}_H^H \longrightarrow \mathcal{M}_k$

Fie $(H, \cdot := M_H, \rho := \Delta) \in \mathcal{M}_H^H$. Atunci :

<u>Propoziție</u> : Fie H = bialgebră. Atunci pentru $M \in \mathcal{M}_H^H$

$$\vartheta_M : \mathrm{Hom}_H^H(H, M) \xrightarrow{\sim} M^{co(H)}$$

$$\vartheta_M(f) := f(1_H), \ (\forall)\ f \in \mathrm{Hom}_H^H(H, M)$$

este <u>izomorfism</u> natural în M cu inversul

$$\vartheta_M^{-1}(m)(h) := m \cdot h, \ (\forall)\ m \in M,\ h \in H.$$

I.e. functorul $(-)^{co(H)}$ este reprezentabil și

$$(-)^{co(H)} \simeq \mathrm{Hom}_H^H(H, -).$$

<u>Dem</u>: Detaliile sunt lăsate ca Exercițiu! De exemplu, dacă $f \in \mathrm{Hom}_H^H(H, M)$ atunci $f(1_H) \in M^{co(H)}$ asci

$$\rho(f(1_H)) = (f \otimes \mathrm{Id})\Delta(1_H) = f(1_H) \otimes 1_H.$$

De asemenea, dacă $m \in M^{co(H)} \Rightarrow \theta_m := \vartheta^{-1}(m) : H \to M$

$\theta_m(h) := m \cdot h$ este morfism în $\mathcal{M}_H^H$ (Exercițiu)

și ϑ și ϑ_M^{-1} sunt inverse una alteia (Ex!). $\blacksquare$

• Acțiuni de algebre Hopf. Produs smash.

• Motivație și scurt istoric (teoria invarianților a lui Hilbert)

Punctul de pornire l-a constituit probabil teorema lui Artin din teoria clasică Galois.

Teoremă (Artin) Fie K = corp, $G \leq Aut(K)$ un subgrup finit de automorfisme și
$$k = K^G \overset{def}{:=} \{x \in K \mid \sigma(x) = x, (\forall)\, \sigma \in G\}$$
subcorpul de invarianți. Atunci extinderea $k \subseteq K$ este galoisiană finită și $Gal(K/k) = G$.

Teorema a cunoscut numeroase generalizări (inclusiv la nivel de algebre Hopf!). Un subgrup $G \leq Aut(K)$ înseamnă un morfism injectiv de ~~algebre~~ grupuri $i : G \hookrightarrow Aut(K)$. Deci e naturală definiția:

Definiție: Fie G = grup și A = k-algebră. Spunem că G acționează prin automorfisme pe A dacă $(\exists)\ \varphi : G \longrightarrow Aut_{k\text{-}Alg}(A)$ un morfism de grupuri.
(notație: $\varphi(g)(a) \overset{not}{=} g \cdot a$).

În acest caz:
$$A^G := \{a \in A \mid g \cdot a = a, (\forall)\, g \in G\}$$
este subalgebră în A (Exercițiu!) numită subalgebra invarianților acțiunii.

Problema fundamentală în teoria invarianților este studiul extinderii $A^G \subseteq A$. In acest context există o metaproblemă: Când este adevărată afirmația: A are proprietatea "P" $\Longleftrightarrow$ A^G are proprietatea "P".

Exemplu (teorema Noether) Fie G = grup finit acționând pe o k-algebră comutativă A. Atunci extinderea $A^G \subseteq A$ este extindere întreagă. In particular, dacă A este afină (i.e. finit generată ca algebră) $\Longrightarrow$ A^G este afină.

Și această teoremă a fost extinsă la nivel de algebre Hopf de F. Santos - S. Montgomery iar S. Zhu și M. Cohen au extins rezultatul pentru k-algebre "quantum comutative".

Definiție: Fie H = algebră Hopf, A = k-algebră. A s.n. H-modul algebră (la stânga) sau spunem că H acționează pe A dacă există $\cdot : H \otimes A \to A$

1) A este H-modul stâng

2) $h \cdot (ab) = \sum (h_{(1)} \cdot a)(h_{(2)} \cdot b)$, $(\forall) h \in H, a, b \in A$

3) $h \cdot 1_A = \varepsilon(h) 1_A$, $(\forall)$ $h \in H$.

O să arătăm că axioma 3) rezultă din 1) și 2) în cazul algebrelor Hopf. Se trebuie menținut dacă H e doar bialgebră.

<u>Observație</u> Dacă A e H-modul stg, atunci evident $\cdot \in \mathrm{Hom}_k(H \otimes A, A)$. Folosind adjuncția Hom-tensor:

$$\alpha : \mathrm{Hom}(H \otimes A, A) \underset{\beta}{\overset{\sim}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(H, A))$$

$$\alpha(\cdot)(a)(h) := h \cdot a$$

$$\beta(g)(h \otimes a) := g(a)(h), \quad (\forall) \dots$$

obținem că aplicației $\cdot$ îi corespunde cu o aplicație $\alpha(\cdot) : A \longrightarrow \mathrm{Hom}(H, A)$. Mai mult, $\mathrm{Hom}(H, A)$ este o k-algebră cu produsul de convoluție.

<u>Propoziție</u>: Fie H = algebră Hopf, A = k-algebră a.î. $(A, \cdot)$ este H-modul stâng. Atunci A e H-modul algebră $\Longleftrightarrow$ $\alpha(\cdot) : A \longrightarrow \mathrm{Hom}(H, A)$ este morfism de k-algebre.

<u>Dem</u>: In adevăr, să explicităm ce înseamnă că $\alpha(\cdot)$ e morfism de k-algebre.

$$\cdot\ \alpha(\cdot)(1_A) = 1_{\mathrm{Hom}(H,A)} \ (= u_A \varepsilon_H) \Longleftrightarrow$$

$$h \cdot 1_A = \varepsilon_H(h)\, u_A(1_k) = \varepsilon(h)\, 1_A \Longleftrightarrow \text{ are loc } 3).$$

Pe de altă parte,

$$\alpha(\cdot)(ab) = \alpha(\cdot)(a) * \alpha(\cdot)(b) \iff$$

$$\alpha(\cdot)(ab)(h) = (RHS)(h), \quad (\forall)\, h \in H \iff$$

$$h \cdot (ab) = (h_{(1)} \cdot a)(h_{(2)} \cdot b), \quad (\forall)\, h \in H,\ a, b \in A \iff$$

2) are loc. ▨

Propoziție (Mia Cohen) Fie H = algebră Hopf, A = k-algebră a.î. $(A, \cdot) \in {}_H\mathcal{M}$ și condiția 2) are loc. Atunci:

$$(*) \quad (h \cdot a)\, b = h_{(1)} \cdot \big(a\, (S(h_{(2)}) \cdot b)\big), \quad (\forall)\, h \in H,\ a, b \in A$$

În particular, axioma 3) rezultă din 1) și 2).

Dem:

$$RHS \overset{(2)}{=} (h_{(1)(1)} \cdot a)\big(h_{(1)(2)} \cdot (S(h_{(2)}) \cdot b)\big) = (h_{(1)} \cdot a)\big((h_{(2)} S(h_{(3)})) \cdot b\big) \overset{(A)}{=} (h_{(1)} \cdot a)\big(\varepsilon(h_{(2)}) 1_H \cdot b\big)$$

$$= (h \cdot a)\, b.$$

Dacă facem în $(*)$ $a = b = 1_A \implies$

$$h \cdot 1_A = h_{(1)} \cdot (S(h_{(2)}) \cdot 1_A) = \varepsilon(h) 1_A, \text{ i.e. } 3).$$ ▨

• <u>Reformularea categorică</u> a conceptului de H-modul algebră.

Fie A = k-algebră a.î. $(A,\cdot) \in {}_H\mathcal{M}$. Atunci, $A\otimes A \in {}_H\mathcal{M}$ via $h\cdot(a\otimes b) = h_{(1)}\cdot a \otimes h_{(2)}\cdot b$ și $k \in {}_H\mathcal{M}$ via $h\cdot\alpha := \varepsilon(h)\alpha$, $(\forall)\, h\in H, \alpha\in k$

<u>Propoziție</u>: Fie H = algebră Hopf, A = k-algebră a.î. $(A,\cdot)\in {}_H\mathcal{M}$. Atunci: $(A,\cdot)$ este H-modul algebră $\Longleftrightarrow$ $M_A : A\otimes A \longrightarrow A$, $u_A : k \longrightarrow A$ sunt morfisme <u>în</u> ${}_H\mathcal{M}$.

<u>Dem</u>: In adevăr, M_A este H-liniară $\Longleftrightarrow$ $M_A(h\cdot(a\otimes b)) = h\cdot M_A(a\otimes b)$, $(\forall)$ ..... $\Longleftrightarrow$ $(h_{(1)}\cdot a)(h_{(2)}\cdot b) = h\cdot(a\, b)$, $(\forall)\, h\in H, a,b\in A$ i.e. axioma 2). În plus, $u_A : k \longrightarrow A$ este H-liniară $\Longleftrightarrow$ $u_A(h\cdot 1_k) = h\cdot u_A(1_k) \Longleftrightarrow \varepsilon(h)1_A = h\cdot 1_A$, $(\forall)\, h\in H$ i.e. axioma 3). ▨

Propoziție permite următoarea:

<u>Reformulare categorică</u>: Fie H = algebră Hopf. S.n. <u>H-modul algebră (st)</u> o algebră <u>în</u> categoria monoidală $({}_H\mathcal{M}, \otimes, k)$.

Observație: Reformularea de mai sus permite definirea a încă trei concepte:

- H-modul coalgebră (st) = coalgebră în categoria $({}_H\mathcal{M}, \otimes, k)$
- H-comodul algebră (dr) = algebră în categoria $(\mathcal{M}^H, \otimes, k)$
- H-comodul coalgebră (dr) = coalgebră în categoria $(\mathcal{M}^H, \otimes, k)$.

Detaliem doar primul concept:

Definiție: Fie H = algebră Hopf. C s.n. H-modul coalgebră (stânga) dacă:

- C e coalgebră, $(C, \cdot) \in {}_H\mathcal{M}$
- $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$, $\varepsilon : \varepsilon \longrightarrow k$ sunt morfisme de H-module stângi i.e.

$$\begin{cases} \Delta(h \cdot c) = h_{(1)} \cdot c_{(1)} \otimes h_{(2)} \cdot c_{(2)} \\ \varepsilon_C(h \cdot c) = \varepsilon_H(h)\, \varepsilon_C(c), \quad (\forall)\, h \in H,\ c \in C. \end{cases}$$

O să revenim mai târziu cu conceptul de H-comodul algebră și aplicațiile lor.

Exercițiu: Fie A = H-modul algebră (st). Atunci $A^H := \{ a \in A \mid h \cdot a = \varepsilon(h) a,\ (\forall)\, h \in H \}$ este subalgebră în A numită algebra invarianților acțiunii.