• Legătura subcoalgebre/coideale vs ideale/subalgebre.

Fie k = corp, V = k-spațiu vectorial, $V^* = \mathrm{Hom}_k(V, k)$

Dacă $S \subseteq V$ notăm:

$$S^\perp := \{ v^* \in V^* \mid \langle v^*, s \rangle = 0, (\forall)\, s \in S \}$$

Dacă $T \subseteq V^*$ notăm:

$$T^\perp := \{ v \in V \mid \langle t, v \rangle = 0, (\forall)\, t \in T \}.$$

Lema 1: Fie $W \leq_k V$ k-subspațiu în V. Atunci:

a) $\langle W^\perp, x \rangle = 0 \implies x \in W$.

b) $W^{\perp\perp} = W$.

Dem a) Știm că $\langle t, x \rangle = 0, (\forall)\, t \in W^\perp =$
$= \{ v^* \in W^* \mid \langle v^*, W \rangle = 0 \}$. Pp. că $x \notin W$.
Atunci putem scrie $V = W \oplus kx \oplus E$, $E \leq_k V$.
Fie $f \in V^*$ a.î. $f(x) := 1$, $f(W) = f(E) := 0$
Atunci $f \in W^\perp$ și $\langle f, x \rangle = 1 \neq 0$, fals! Deci $x \in W$.

b) Fie $x \in W^{\perp\perp} \implies \langle W^\perp, x \rangle = 0 \overset{a)}{\implies}$
$x \in W$ i.e. $W^{\perp\perp} \subseteq W$.

$W \subseteq W^{\perp\perp}$ e banal. $\boxtimes$

Lema 2 Fie V şi W k-spaţii vectoriale şi $X \leq_k V^*$, $Y \leq_k W^*$ şi considerăm $\underline{X \otimes Y} \leq_k V^* \otimes W^* \leq_k \underline{(V \otimes W)^*}$. Atunci:

$$\boxed{(X \otimes Y)^{\perp} = X^{\perp} \otimes W + V \otimes Y^{\perp}}$$

Dem: Fie $\overline{R} : V \longrightarrow X^*$, $\langle \overline{R}(v), x \rangle := \langle x, v \rangle$

$\overline{S} : W \longrightarrow Y^*$, $\langle \overline{S}(w), y \rangle := \langle y, w \rangle$

Atunci $X^{\perp} = \mathrm{Ker}(\overline{R})$, $Y^{\perp} = \mathrm{Ker}(\overline{S})$

Fie diagramele:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\overline{R}"'] & V/_{X^{\perp}} \arrow[dl, dashed, "(\exists!)R"] \\ X^* & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\overline{S}"'] & W/_{Y^{\perp}} \arrow[dl, dashed, "(\exists!)S"] \\ Y^* & \end{tikzcd}$$

Cum $\mathrm{Ker}(\overline{R}) = X^{\perp}$ şi $\mathrm{Ker}(\overline{S}) = Y^{\perp}$ $\Longrightarrow$

$(\exists!)$ $R : V/_{X^{\perp}} \longrightarrow X^*$, $S : W/_{Y^{\perp}} \longrightarrow Y^*$

k-liniare şi injective a.î. diagramele sunt comut

Fie compunerea:

$$V/_{X^{\perp}} \otimes W/_{Y^{\perp}} \xhookrightarrow{R \otimes S} X^* \otimes Y^* \xhookrightarrow{\rho} (X \otimes Y)^*$$

care este injectivă căci ρ şi $R \otimes S$ sunt injective

(reamintim $\rho(x^* \otimes y^*)(x \otimes y) := \langle x^*, x \rangle \langle y^*, y \rangle$)

Definim acum

$$\alpha : V \otimes W \longrightarrow (X \otimes Y)^*, \quad \langle \alpha(v \otimes w), x \otimes y \rangle := \langle x, v\rangle\langle y$$
$$(= \langle x, v\rangle \langle y, w$$

$(\forall)\ v \in V,\ w \in W,\ x \in X,\ y \in Y.$

Atunci $\operatorname{Ker}(\alpha) = (X \otimes Y)^{\perp}$ şi diagrama:

$$\begin{tikzcd}
V \otimes W \arrow[r, "\pi_1 \otimes \pi_2"] \arrow[d, "\alpha"'] & V/_{X^\perp} \otimes W/_{Y^\perp} \arrow[dl, "\rho \circ (R \otimes S)"] \\
(X \otimes Y)^* &
\end{tikzcd}$$

care este comutativă. Cum $\rho \circ (R \otimes S)$ e injectivă $\Rightarrow$

$(X \otimes Y)^{\perp} = \operatorname{Ker}(\alpha) = \operatorname{Ker}(\pi_1 \otimes \pi_2) =$ (Lema, pg. 26) $= V \otimes Y^{\perp} + X^{\perp} \otimes W.$ ∎

Teorema Fie C = coalgebră şi C^* algebra duală. Atunci:

1) $I \trianglelefteq C^*$ este <u>ideal</u> bilateral în $C^* \Longrightarrow$ $I^{\perp} \subseteq C$ este <u>subcoalgebră</u> în C.

2) $D \subseteq C$ este subcoalgebră în $C \Longleftrightarrow D^{\perp} \trianglelefteq C^*$ este ideal bilateral în C^*.

3) $J \subseteq C^*$ este subalgebră $\Longrightarrow J^{\perp} \subseteq C$ este coideal în C.

4) $I \subseteq C$ este coideal în $C \Longleftrightarrow I^{\perp}$ este subalgebră în C^*.

<u>Dem</u>:

1) Fie $I \trianglelefteq C^*$ ideal bilateral.

<u>Vrem</u>: $I^{\perp} \subseteq C$ este subcolgebră i.e. $\Delta(I^{\perp}) \subseteq$
$\subseteq I^{\perp} \otimes I^{\perp}$.

Fie $x \in I^{\perp}$. Arăt mai întâi că $\underline{\Delta(x) \overset{?}{\in} I^{\perp} \otimes C}$

Fie $\Delta(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \otimes z_i \in C \otimes C$, cu $n =$ <u>minim</u>

$\Rightarrow \{y_i \mid i=\overline{1,n}\}$, $\{z_i \mid i=\overline{1,n}\}$ sunt liniar independente / k.

Pp. $\Delta(x) \notin I^{\perp} \otimes C$ și pentru a face o alegere pp. că $\underline{y_1 \notin I^{\perp}} \Longrightarrow (\exists)\, \alpha \in I$ a.î. $\langle \alpha, y_1 \rangle \neq 0$

Fie $\beta \in C^*$ a.î. $\underline{\langle \beta, z_j \rangle := \delta_{1,j}}$, $(\forall)\, j=\overline{1,n}$

(pot face asta completând $\{z_1, \ldots z_n\}$ până la o bază în C).

Cum $I \trianglelefteq C^* \Rightarrow \alpha\beta \in I \overset{x \in I^{\perp}}{\Longrightarrow} \langle \alpha\beta, x \rangle = 0$

Deci:

$$0 = \langle \alpha\beta, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \alpha, y_i \rangle \langle \beta, z_i \rangle =$$

$= \langle \alpha, y_1 \rangle \neq 0$, fals!

Deci, dacă scriem $\Delta(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \otimes z_i$, cu

$n =$ <u>minim</u> $\Longrightarrow y_1, \ldots y_n \in I^{\perp}$ și <u>analog</u>

$z_1, \ldots z_n \in I^{\perp} \Longrightarrow \Delta(x) \in I^{\perp} \otimes I^{\perp}$ i.e.

$I^{\perp}$ e subcoalgebră în C.

2) „$\Longrightarrow$" Fie $D \subseteq C$ subcoalgebră în C. $\Longrightarrow$

$i : D \hookrightarrow C$ e morfism de coalgebre $\Longrightarrow$

$i^* : C^* \longrightarrow D^*$ e morfism de algebre.

<u>Afirm</u>: $\mathrm{Ker}(i^*) \overset{?}{=} D^\perp$ ($\Rightarrow D^\perp$ e ideal în C^*)

$$\mathrm{Ker}(i^*) = \{c^* \in C^* \mid i^*(c^*) = 0\}$$
$$= \{c^* \in C^* \mid c^* \circ i = 0\}$$
$$= \{c^* \in C^* \mid \langle c^*, d\rangle = 0, (\forall)\, d \in D\}$$
$$= D^\perp.$$

„$\Longleftarrow$" Dacă $D^\perp \trianglelefteq C^* \xRightarrow{1)} D^{\perp\perp} \subseteq C$ e subcoalgebră în C. Dar (Lema 1) $D^{\perp\perp} = D$ și gata.

3) Fie $J \subseteq C^*$ o subalgebră în C^* $\Longrightarrow$

$1_{C^*} = \varepsilon \in J \Longrightarrow \varepsilon(J^\perp) \overset{?}{=} 0$. În adevăr, pentru $v \in J^\perp$ avem $\langle f, v\rangle = 0$, $(\forall)\, f \in J$

$\xRightarrow{\varepsilon \in J} \varepsilon(v) = 0 \Longrightarrow \varepsilon(J^\perp) = 0.$

A rămas de arătat că $\underline{\Delta(J^\perp) \overset{?}{\subseteq} J^\perp \otimes C + C \otimes J^\perp}$

Fie $\rho : C^* \otimes C^* \hookrightarrow (C \otimes C)^*$
$$\langle \rho(f \otimes g), c \otimes d\rangle := \langle f, c\rangle\langle g, d\rangle$$

Avem:

$$\langle \rho(J \otimes J), \Delta(J^\perp)\rangle = \langle \Delta^* \rho(J \otimes J), J^\perp\rangle$$

Cum $J \subseteq C^*$ este subalgebră $\Rightarrow \Delta^* \rho(J \otimes J) = J$

obținem:

$$\langle \rho(J \otimes J), \Delta(J^{\perp}) \rangle = \langle J, J^{\perp} \rangle = 0$$

i.e. $\Delta(J^{\perp}) \subseteq \rho(J \otimes J)^{\perp} \overset{\text{Lema 2}}{=\!=} C \otimes J^{\perp} + J^{\perp} \otimes C$

i.e. $J^{\perp}$ e coideal.

4) "$\Longrightarrow$" Fie $I \subseteq C$ un coideal. $\Rightarrow \pi : C \to C/_I$

$\pi(c) := \hat{c}$ e morfism de coalgebre $\Rightarrow$

$\pi^* : (C/_I)^* \longrightarrow C^*$ e morfism injectiv de

k-algebre și $\mathrm{Im}(\pi^*) = I^{\perp} \Rightarrow I^{\perp}$ este

subalgebră în C^*.

"$\Longleftarrow$" Dacă $I^{\perp} \subseteq C^*$ este subalgebră $\underset{\text{Lema 1}}{\overset{(3)}{\Longrightarrow}} I^{\perp\perp} = I$

e coideal în C. ∎

• **Comodule**

Def Fie $C = (C, \Delta, \varepsilon)$ o coalgebră. S.n. C-comodul drept o pereche (M, ρ), unde M e k-modul, $\rho : M \longrightarrow M \otimes C$ e k-liniară a.î. diagramele

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] \arrow[dr, phantom, "\shortparallel\ (1)"] & M \otimes C \arrow[d, "\rho \otimes 1"] \\ M \otimes C \arrow[r, "1 \otimes \Delta"'] & M \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "can"', "\sim"] & M \otimes C \arrow[d, "1 \otimes \varepsilon"] \arrow[dl, phantom, "\shortparallel\ (2)"] \\ & M \otimes k \end{tikzcd}$$

sunt comutative.

Dacă (M, ρ_M), (N, ρ_N) sunt două C-comodule drepte, o aplicaţie k-liniară $f : M \longrightarrow N$ s.n. morfism de C-comodule (sau aplicaţie C-colineară) dacă diagrama următoare e comutativă.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_M"'] \arrow[dr, phantom, "\shortparallel\ (3)"] & N \arrow[d, "\rho_N"] \\ M \otimes C \arrow[r, "f \otimes Id"'] & N \otimes C \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}^C \overset{not}{=}$ categoria C-comodulelor drepte.

Def: Fie $(M, \rho) \in \mathcal{M}^C$. Un k-submodul $N \leq_k M$ s.n. C-subcomodul în M dacă $\rho(N) \subseteq N \otimes C$.

Σ - notaţie pentru comodule.

Dacă $(M, \rho) \in \mathcal{M}^C$ e un C-comodul drept, $\rho : M \longrightarrow M \otimes C$, $\rho(m) \overset{not}{=} \sum m_{\langle 0 \rangle} \otimes m_{\langle 1 \rangle} = m_{\langle 0 \rangle} \otimes m_{\langle 1 \rangle}$

Cu această notaţie comutativitatea diagramei (1) $\Longleftrightarrow$

$$m_{\langle 0 \rangle_{\langle 0 \rangle}} \otimes m_{\langle 0 \rangle_{\langle 1 \rangle}} \otimes m_{\langle 1 \rangle} = m_{\langle 0 \rangle} \otimes m_{\langle 1 \rangle (1)} \otimes m_{\langle 1 \rangle (2)} \overset{not}{=}$$

$$\overset{not}{=} m_{\langle 0 \rangle} \otimes m_{\langle 1 \rangle} \otimes m_{\langle 2 \rangle} \in M \otimes C \otimes C$$

(sumarea presupusă!). Analog, comutativitatea diagramei (2) $\Longleftrightarrow$

$$\boxed{\sum m_{\langle 0 \rangle} \varepsilon(m_{\langle 1 \rangle}) = m}, \ (\forall) m \in M.$$

Faptul că $f : M \longrightarrow N$ este C-colineară este echivalent cu:

$$\boxed{f(m)_{\langle 0 \rangle} \otimes f(m)_{\langle 1 \rangle} = f(m_{\langle 0 \rangle}) \otimes m_{\langle 1 \rangle}},$$

$(\forall) m \in M$.

<u>Observaţie</u>: Analog putem defini noţiunea de C-comodul stâng: o pereche (M, ρ) s.n. <u>C-comodul stâng</u> dacă M este k-modul,

$\rho : M \longrightarrow C \otimes M$ e k-liniară

(Σ-notaţie: $\rho(m) = \sum m_{\langle -1 \rangle} \otimes m_{\langle 0 \rangle} = m_{\langle -1 \rangle} \otimes m_{\langle 0 \rangle}$

$\in C \otimes M$) a.î. diagramele

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] \arrow[dr, phantom, "(1')\ ="] & C\otimes M \arrow[d, "1\otimes\rho"] \\ C\otimes M \arrow[r, "\Delta\otimes I"'] & C\otimes C\otimes M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\sim", "can"'] & C\otimes M \arrow[d, "\varepsilon\otimes Id"] \arrow[l, phantom, "(2')\ ="] \\ & k\otimes M \end{tikzcd}$$

sunt comutative.

$(1') \iff m_{<-1>} \otimes m_{<0><-1>} \otimes m_{<0><0>} = m_{<-1>(1)} \otimes m_{<-1>(2)} \otimes m_{<0>}$

$\overset{not}{=} m_{<-2>} \otimes m_{<-1>} \otimes m_{<0>} \in C\otimes C\otimes M.$

$(2') \iff \underline{\sum \varepsilon(m_{<-1>})\, m_{<0>} = m}, \quad (\forall)\ m\in M$

Categoria C-comodulelor stângi se notează cu ${}^{C}\mathcal{M}$. Morfismele în $\mathcal{M}^C$ (respectiv în ${}^{C}\mathcal{M}$) se notează cu:

$$\mathrm{Hom}^C(M,N) \quad (\text{resp. } {}^{C}\mathrm{Hom}(M,N)).$$

<u>Definiție</u> Fie C, D două coalgebre. S.n. <u>(C,D)-bicomodul</u> un triplet (M, ρ^l, ρ^r), unde $(M,\rho^l) \in {}^{C}\mathcal{M}$, $(M,\rho^r) \in \mathcal{M}^D$ a.î. diagrama următoare

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho^l"] \arrow[d, "\rho^r"'] \arrow[dr, phantom, "="] & C\otimes M \arrow[d, "Id\otimes\rho^r"] \\ M\otimes D \arrow[r, "\rho^l\otimes Id"'] & C\otimes M\otimes D \end{tikzcd}$$

este comutativă. În Σ-notație asta se exprimă:

$$m_{<-1>} \otimes m_{<0><0>} \otimes m_{<0><1>} = m_{<0><-1>} \otimes m_{<0><0>} \otimes m_{<1>} =$$

$$\overset{not}{=} m_{<-1>} \otimes \underline{m_{<0>}} \otimes m_{<1>} \in C \otimes \underline{M} \otimes D$$

${}^{C}\mathcal{M}^{D}$ va fi categoria (C, D)-bicomodulelor în care morfismele $f : M \to N$ sunt aplicațiile C-colineare (la stânga) și D-colineare (la dreapta).

Exemplu standard : $(C, \rho^{l} := \rho^{r} := \Delta) \in {}^{C}\mathcal{M}^{C}$ este un (C, C)-bicomodul.

Exerciții : 1) Dacă $\varphi : C \to D$ e morfism de coalgebre și $(M, \rho) \in \mathcal{M}^{C} \Rightarrow (M, \rho') \in \mathcal{M}^{D}$,

unde :

$$\rho' : M \xrightarrow{\rho} M \otimes C \xrightarrow{Id \otimes \varphi} M \otimes D ,$$

$$\rho' := (Id \otimes \varphi) \circ \rho .$$

În felul acesta există un functor, numit <u>corestricția scalarilor</u>, $\varphi^{*} : \mathcal{M}^{C} \longrightarrow \mathcal{M}^{D}$.

2) $f : M \to N$ e morfism de C-comodule drepte $\Rightarrow$ Ker(f) este subcomodul în M și Im(f) este subcomodul în N.

3) Arătați că există un izomorfism de categorii

$$\boxed{{}^{C}\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}^{C^{cop}}}$$

• Exemple de comodule

Propoziție: Fie X = mulțime, $C = k[X]$ coalgebra grupală și M un k-modul. Atunci, M are o structură de $k[X]$-comodul drept $\Longleftrightarrow$ M este "modul produs de tip X", i.e. $(\exists)$ $\{M_x \mid x \in X\}$ o familie de k-submodule în M a.î. $M = \bigoplus_{x\in X} M_x$.

Dem "$\Longleftarrow$" Pp. că $M = \bigoplus_{x\in X} M_x$ și definim

$$\rho : M \longrightarrow M \otimes k[X], \quad \rho(m_x) := m_x \otimes x, \quad (\forall)\, m_x \in M_x,\ x \in X.$$

Atunci $(M, \rho) \in \mathcal{M}^{k[X]}$. În adevăr,

$$\sum \varepsilon\left((m_x)_{<1>}\right)(m_x)_{<0>} = \varepsilon(x) m_x = m_x, \quad (\forall)\, m_x \in M_x$$

și

$$[(\rho\otimes I)\rho](m_x) = (\rho\otimes I)(m_x\otimes x) = m_x \otimes x \otimes x =$$

$$= (1\otimes\Delta)(m_x\otimes x) = (1\otimes\Delta)\rho(m_x), \quad (\forall)\, m_x \in M_x$$

i.e. $(\rho\otimes I)\circ\rho = (1\otimes\Delta)\circ\rho$ și $(M,\rho) \in \mathcal{M}^{k[X]}$.

"$\Longrightarrow$" Pp. că $M \in \mathcal{M}^{k[X]}$ și fie $\rho : M \longrightarrow M\otimes k[X]$.

Pentru $m \in M$, $\rho(m) = \sum_{x\in X} m_x \otimes x$ și scrierea este unică căci $\{x \mid x\in X\}$ este k-bază în $k[X]$.

Definim $\underline{M_x :\overset{def}{=} \{ m_x \mid m \in M\}}$, $(\forall)\, x \in X$.

__Afirm__: $M_x \overset{?}{=} \{ m\in M \mid \rho(m) = m\otimes x\}$

„$\supseteq$" $\rho(m) = m \otimes x \Rightarrow m \in M_x$ din definiția lui M_x.

„$\subseteq$" Fie $m_x \in M_x$. Vrem: $\rho(m_x) \overset{?}{=} m_x \otimes x$

Fie $m \in M$ a.î. $\rho(m) = \sum_{x \in X} m_x \otimes x \Rightarrow$

$(\rho \otimes I) \circ \rho(m) = (I \otimes \Delta) \circ \rho(m) \Rightarrow$

$\sum_x \underline{\rho(m_x)} \otimes x = \sum_x \underline{m_x \otimes x} \otimes x \Rightarrow \rho(m_x) = m_x \otimes x$

(căci $\{x \mid x \in X\}$ e bază în $k[X]$).

Arătăm acum că $M \overset{?}{=} \bigoplus_{x \in X} M_x$

Fie $m \in M \Rightarrow m = \sum_{x \in X} \varepsilon(x) m_x = \sum_{x \in X} m_x \Rightarrow$

$M = \sum_{x \in X} M_x$. Arătăm acum că $\sum_{x \in X} M_x$ e directă.

În adevăr, dacă

$\sum_{x \in X} m_x = 0 \overset{\rho}{\Longrightarrow} \sum_{x \in X} m_x \otimes x = 0 \Rightarrow$ ($\{x \mid x \in X\}$ este k-bază în $k[X]$) $m_x = 0$, $(\forall)\ x \in X$. ☒

Definiție: Fie C = coalgebră, $n \in \mathbb{N}^*$ și $(c_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ o familie de elemente ale lui C. Matricea $A := (c_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ s.n. <u>matrice comultiplicativă</u> de ordinul n dacă

$$\Delta(c_{ij}) = \sum_{t=1}^{n} c_{it} \otimes c_{tj}, \quad \varepsilon(c_{ij}) = \delta_{ij} \quad (\forall)\ i,j = \overline{1,n}$$

Vom nota formal aceste relații astfel: $\begin{cases} \Delta(A) = A \otimes A, \\ \varepsilon(A) = I_n \end{cases}$

Propoziție: Fie C = coalgebră, $n \in \mathbb{N}^*$ și M un k-spațiu vectorial de dimensiune n.

Atunci, există o corespondență bijectivă între structurile de C-comodul drept pe M și matricile comultiplicative de ordinul n ale lui C.

Dem: Fie $\{m_1, \dots, m_n\}$ o k-bază fixată în M.

A da o aplicație k-liniară $\rho : M \longrightarrow M \otimes C$ este echivalent cu a da o familie de elemente $\{c_{ij} \mid i,j = \overline{1,n}\}$ ale lui C a.î.

$$\rho(m_i) = \sum_{j=1}^{n} m_j \otimes c_{ji}, \quad (\forall)\ i = \overline{1,n}$$

($\{c_{ij}\}_{i,j=\overline{1,n}}$ sunt elemente unic determinate de ρ căci $\{m_i \mid i = \overline{1,n}\}$ este k-bază).

Afirm: $(M, \rho) \in \mathcal{M}^C \iff A := (c_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ e matrice comultiplicativă a lui C. În adevăr,

$$(\rho \otimes I)\rho(m_i) = \sum_j (\rho \otimes I)(m_j \otimes c_{ji}) =$$

$$= \sum_{j,t} m_t \otimes c_{tj} \otimes c_{ji} = \sum_t m_t \otimes \underline{\left(\sum_j c_{tj} \otimes c_{ji}\right)}$$

$$(1 \otimes \Delta)\rho(m_i) = (1 \otimes \Delta)\left(\sum_t m_t \otimes c_{ti}\right) =$$

$$= \sum_t m_t \otimes \underline{\Delta(c_{ti})} \quad \text{ș.a.}$$

$$(\rho \otimes I)\rho = (1 \otimes \Delta) \circ \rho \iff \underline{\Delta(c_{ti}) = \sum_j c_{tj} \otimes c_{ji}}, (\forall)\ t, i$$

În plus,

$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon(c_{ji})\, m_j = m_i \iff \varepsilon(c_{ji}) = \delta_{ij} \quad (\forall)\, i,j=\overline{1,n}$$

$\boxtimes$

Exerciții 1) Arătați că există un functor

$$-\otimes C : \mathcal{M}_k \longrightarrow \mathcal{M}^C, \quad M \longmapsto M\otimes C$$

unde $M\otimes C \in \mathcal{M}^C$ via:

$$\rho_{M\otimes C}(m\otimes c) := \sum m\otimes c_{(1)}\otimes c_{(2)}, \ (\forall)\, m\in M,\ c\in C$$

i.e. $\rho_{M\otimes C} = \mathrm{Id}_M \otimes \Delta$.

2) Fie $M, P \in \mathcal{M}^C$ și $N \in \mathcal{M}_k$. Atunci:

$$\psi : \mathrm{Hom}^C(N\otimes M, P) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(N, \mathrm{Hom}^C(M,P)),$$

$$\psi(g)(n)(m) := g(n\otimes m), \ (\forall) \dots$$

este izo de k-spații cu inversul

$$\psi^{-1}(h)(n\otimes m) := h(n)(m), \ (\forall) \dots$$

unde $N\otimes M \in \mathcal{M}^C$ via $\rho(n\otimes m) = \sum n\otimes m_{<0>}\otimes m_{<1>}$

3) Fie $M \in \mathcal{M}^C$ și $N\in \mathcal{M}_k$. Atunci:

$$\varphi : \mathrm{Hom}_k(M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^C(M, N\otimes C)$$

$$\varphi(f) := (f\otimes \mathrm{Id}_C)\circ \rho_M$$

e izo de k-spații cu inversul

$$\varphi^{-1}(g) := (\mathrm{Id}_N \otimes \varepsilon)\circ g$$

4) Fie $M \in \mathcal{M}^C$ și N un subcomodul al său.
Atunci, $(\exists!)$ o structură de C-comodul pe $M/_{N}$ a.î. $\pi : M \longrightarrow M/_{N}$ e morfism de C-comodule drepte:

$$\rho_{M/_{N}}(\hat{m}) = \sum \widehat{m_{<0>}} \otimes m_{<1>}, \ (\forall)\, \hat{m} \in M/_{N}$$

În plus, dacă $f : M \longrightarrow N$ este C-colineară
$\Longrightarrow$ există un izomorfism de C-comodule drepte

$$M/_{\mathrm{Ker}(f)} \simeq \mathrm{Im}(f).$$

Propoziție: Categoria $\mathcal{M}^C$ are coproduse arbitrare.

Dem: Fie $(M_i)_{i \in I}$ o familie de C-comodule drepte și $\bigoplus_{i \in I} M_i$ coprodusul lor (suma directă) în categoria $\mathcal{M}_k$ și $\alpha_j : M_j \hookrightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$ incluziunile canonice.

$$\begin{tikzcd}
M_j \arrow[r, hook, "\alpha_j"] \arrow[d, "\rho_j"'] \arrow[dr, phantom, "\shortparallel"] & \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[d, dashed, "(\exists!)\,\rho"] \\
M_j \otimes C \arrow[r, "\alpha_j \otimes \mathrm{Id}_C"'] & \left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \otimes C
\end{tikzcd}$$

$\Longrightarrow (\exists!)\ \rho : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow \left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \otimes C$ k-liniară a.î. diagramele sunt comutative $(\forall)\, j \in I$

$\Rightarrow \left(\bigoplus_{i\in I} M_i, \rho\right) \in \mathcal{M}^C$ și el este coprodusul familiei $(M_i)_{i\in I}$ în categoria $\mathcal{M}^C$. ☑

Teoremă (teorema de finitudine pentru comodule)
Fie C = coalgebră, $M \in \mathcal{M}^C$ și $m \in M$.
Atunci $(\exists)$ un subcomodul <u>finit dimensional</u> N al lui M a.î. $m \in N$.

<u>Dem</u> Fie $\{c_i\}_{i\in I}$ o bază în C și $\rho : M \to M \otimes C$ structura de C-comodul drept a lui M.

$$\rho(m) = \sum_{i\in F} m_i \otimes c_i, \quad m_i \in M, \quad i \in F \subseteq I, \ F = \underline{\text{finit}}$$

Fie $\Delta(c_i) = \sum_{j,k} \alpha^i_{jk} c_j \otimes c_j$ și

$N :=$ k-subspațiu lui M generat de $\underline{\{m, m_i \mid i \in F\}}$

<u>Afirm</u>: N este subcomodul în M (evident e finit dimensional și $m \in N$).

$$(\rho \otimes I)\rho(m) = (1 \otimes \Delta)\rho(m) \Longrightarrow$$

$$\sum_i \rho(m_i) \otimes \underline{c_i} = \sum_j m_j \otimes \Delta(c_j) =$$

$$= \sum_{j,i,t} m_j \otimes \alpha^j_{ti} c_t \otimes \underline{c_i}$$

$$\Longrightarrow \rho(m_i) = \sum_{j,t} \alpha^j_{ti} m_j \otimes c_t, \text{ i.e.}$$

$\rho(m_i) \in N \otimes C$ și evident $\rho(m) \in N \otimes C$

i.e. N este subcomodul în M. $\square$

Def: Un C-comodul drept s.n. simplu dacă nu are subcomodule netriviale.

Corolar Orice C-comodul drept simplu este finit dimensional. $\square$

Comodule vs Module

Fie C = coalgebră și C^* algebra sa duală.
Fie M un k-modul și $\rho : M \to M \otimes C$ o aplicație k-liniară (nu neapărat structură de comodul). Notăm $\rho(m) \overset{not}{=} m_{<0>} \otimes m_{<1>}$ (sumarea presupusă). Fie

$$\dot{\rho} : C^* \otimes M \longrightarrow M$$

$$c^* \dot{\rho}\, m :\overset{def}{=} \langle c^*, m_{<1>} \rangle m_{<0>}, (\forall) c^* \in C^*, m \in M.$$

Propoziție În contextul de mai sus avem că $(M, \rho) \in \mathcal{M}^C$ este C-comodul drept $\iff$ $(M, \dot{\rho}) \in {}_{C^*}\mathcal{M}$ este C^*-modul stâng.

Dem „$\Rightarrow$" Pp. că $(M, \rho) \in \mathcal{M}^C$ și notăm $\cdot = \dot{\rho}$. Atunci

$$1_{C^*} \cdot m = \varepsilon_C \cdot m = \langle \varepsilon_C, m_{<1>} \rangle m_{<0>} = m, (\forall) m \in M$$

și

$$(c^* * d^*)\cdot m = \langle c^* * d^*, m_{<1>}\rangle\, m_{<0>} =$$

$$= \langle c^*, \underbrace{m_{<1>(1)}}_{<1>}\rangle \langle d^*, \underbrace{m_{<1>(2)}}_{<2>}\rangle\, \underbrace{m_{<0>}}_{<0>} =$$

$$= \langle c^*, m_{<1>}\rangle \langle d^*, m_{<2>}\rangle\, m_{<0>}$$ şi

$$c^*\cdot(d^*\cdot m) = c^*\cdot \langle d^*, m_{<1>}\rangle\, m_{<0>} =$$

$$= \langle d^*, m_{<1>}\rangle\, c^*\cdot m_{<0>} =$$

$$= \langle d^*, \underbrace{m_{<1>}}_{<2>}\rangle \langle c^*, \underbrace{m_{<0><1>}}_{<1>}\rangle\, \underbrace{m_{<0><0>}}_{<0>}$$

$$= \langle d^*, m_{<2>}\rangle \langle c^*, m_{<1>}\rangle\, m_{<0>}$$

i.e. $(M, \dot{\rho}) \in {}_{C^*}\mathcal{M}$.

"$\Leftarrow$" Pp. că $(M, \dot{\rho}) \in {}_{C^*}\mathcal{M}$. Vrem: $(M, \rho) \in \mathcal{M}^C$.

Pentru $m \in M$ avem:

$$\sum \varepsilon_C(m_{<1>})\, m_{<0>} = \varepsilon_C \cdot m = 1_{C^*}\cdot m = m,$$ i.e.

proprietatea de counitate are loc pentru ρ.

<u>Vrem</u>: $m_{<0>} \otimes m_{<1>(1)} \otimes m_{<1>(2)} \overset{?}{=} m_{<0><0>} \otimes m_{<0><1>} \otimes m_{<1>}$

$(\forall)\, m \in M$. Fie $c^*, d^* \in C^*$. Atunci:

$$\underline{(1\otimes c^* \otimes d^*)(LHS)} = m_{<0>} \langle c^*, m_{<1>(1)}\rangle \langle d^*, m_{<1>(2)}\rangle$$

$$= m_{<0>} \langle c^* * d^*, m_{<1>}\rangle = \underline{(c^* * d^*)\cdot m}$$

şi

$(1\otimes c^*\otimes d^*)(RHS) = m_{<0><0>}\langle c^*, m_{<0><1>}\rangle\langle d^*, m_{<1>}\rangle$

$= (c^*\cdot m_{<0>})\langle d^*, m_{<1>}\rangle = c^*\cdot(\langle d^*, m_{<1>}\rangle m_{<0>}) =$

$= c^*\cdot(d^*\cdot m)$

i.e. $(1\otimes c^*\otimes d^*)(LHS) = (1\otimes c^*\otimes d^*)(RHS)$, $(\forall)$
$c^*, d^*\in C^* \Rightarrow LHS = RHS$ i.e. $(M,\rho)\in \mathcal{M}^C$. ☐

Am folosit observația următoare:

Obs: Mai sus am folosit observația următoare:
$y = \sum_{ij} m_{ij}\otimes c_i\otimes c_j \in M\otimes C\otimes C$ a.î.
$(1\otimes c^*\otimes d^*)(y) = 0$, $(\forall)$ $c^*, d^*\in C^* \Rightarrow y = 0$.

În adevăr, luăm $(c_i)_{i\in I}$ o bază în C și pentru $i_0, j_0\in I$ fixați luăm $c^* = c_{i_0}^*$, $d^* = c_{j_0}^*$
$\Rightarrow m_{i_0 j_0} = 0$ $(\forall)$ $i_0, j_0\in I$. ☐

Exercițiu Fie A = k-algebră finit dimensională și $M\in {}_A\mathcal{M}$ finit dimensional peste k. Atunci $M\in\mathcal{M}^{A^*}$.

Indicație: Fie $\{m_1,\dots,m_n\}$ k-bază în M și fixăm $m\in M$. Pentru $a\in A$ scriem:

$$a\cdot m = \sum_{i=1}^n f_i(a) m_i,\quad f_i\in A^*,\ f_i(a)\in k.$$

Definim $\rho: M\to M\otimes A^*$, $\rho(m) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^n m_i\otimes f_i$

Atunci $(M,\rho)\in\mathcal{M}^{A^*}$. ☐

Teorema: Fie C = coalgebră. Atunci functorul

$$F : \mathcal{M}^C \longrightarrow {}_{C^*}\mathcal{M}, \quad F(M, \rho) := (M, \dot{\rho})$$
$$F(f) := f$$

este <u>fidel</u> și <u>full</u>.
În plus, dacă C e <u>finit dimensională</u> atunci F este <u>izomorfism</u> de categorii.

<u>Dem</u>: Știm deja că dacă $(M, \rho) \in \mathcal{M}^C \Rightarrow$
$(M, \dot{\rho}) \in {}_{C^*}\mathcal{M}$ unde $c^* \cdot m = \langle c^*, m_{\langle 1\rangle}\rangle m_{\langle 0\rangle}$,
$(\forall)$ $c^* \in C^*$, $m \in M$.

Fie $f : M \to N$ morfism de C-comodule.
<u>Vrem</u>: $F(f) = f : M \to N$ este C^*-liniară.

$$f(c^* \cdot m) = f\left(\langle c^*, m_{\langle 1\rangle}\rangle m_{\langle 0\rangle}\right) = \langle c^*, m_{\langle 1\rangle}\rangle f(m_{\langle 0\rangle})$$

și

$$c^* \cdot f(m) = \langle c^*, f(m)_{\langle 1\rangle}\rangle f(m)_{\langle 0\rangle} \overset{f \text{ este } C\text{-colineară}}{=\!=}$$

$$= \langle c^*, m_{\langle 1\rangle}\rangle f(m_{\langle 0\rangle}) \text{ și ok.}$$

Fie <u>$M, N \in \mathcal{M}^C$</u> și aplicația naturală

$$\mathcal{F}_{M,N} : \mathrm{Hom}^C(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C^*}(M, N)$$
$$\mathcal{F}_{M,N}(f) := F(f) = f$$

$\mathcal{F}_{M,N}$ este injectivă, i.e. F e functor <u>fidel</u>.

- $F_{M,N}$ este surjectivă ? ($\Rightarrow$ F este full).

Fie $f : M \longrightarrow N$ morfism în ${}^{C^*}\mathcal{M}$

Vrem: f e morfism în $\mathcal{M}^C$ i.e.

$$f(m_{<0>}) \otimes m_{<1>} \overset{?}{=} f(m)_{<0>} \otimes f(m)_{<1>}, \ (\forall)\, m \in M$$

Fie $c^* \in C^*$. Atunci:

$$(1 \otimes c^*)(LHS) = f(m_{<0>}) \langle c^*, m_{<1>} \rangle =$$

$$= f(\langle c^*, m_{<1>} \rangle m_{<0>}) = f(c^* \cdot m) =$$

$$= c^* \cdot f(m)$$

$$(1 \otimes c^*)(RHS) = f(m)_{<0>} \langle c^*, f(m)_{<1>} \rangle =$$

$$= c^* \cdot f(m)$$

i.e. $(1 \otimes c^*)(LHS) = (1 \otimes c^*)(RHS), \ (\forall)\, c^* \in C^*$

$\Rightarrow$ LHS = RHS i.e. f este C-colineară.

$\Rightarrow$ F este full.

- Fie C = finit dimensională $\overset{?}{\Longrightarrow}$ F este izomorfism de categorii.

Fie $\{e_i, e_i^* \mid i = \overline{1,n}\}$ bază duală pentru C (resp. C^*)

$$\Rightarrow (DB): \sum_{i=1}^{n} \langle e_i^*, c \rangle e_i = c, \quad (\forall)\, c \in C.$$

Definim functorul : $\left((DB') \sum_{i=1}^{n} \langle c^*, e_i \rangle e_i^* = c^*, \ (\forall)\, c^* \in C^* \right)$

$G : {}_{C^*}\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}^C, \quad G(M) := M$, cu

$$\underline{\rho(m) := \sum_{i=1}^{n} e_i^* \cdot m \otimes e_i} \overset{\text{not}}{=} m_{<0>} \otimes m_{<1>}.$$

• $(M, \rho) \in \mathcal{M}^C$

$$\varepsilon(m_{<1>}) m_{<0>} = \sum_{i=1}^{n} \underline{\varepsilon(e_i) e_i^*} \cdot m \overset{(DB')}{=} \varepsilon \cdot m =$$

$$= 1_{C^*} \cdot m = m, \quad (\forall)\ m \in M.$$

Arăt acum că $(\rho \otimes I)\rho \overset{?}{=} (1 \otimes \Delta_C) \circ \rho$.

Fie $c^*, d^* \in C^*$ și $m \in M$. Atunci:

$$(1 \otimes c^* \otimes d^*) \circ (\rho \otimes Id)\, \rho(m) =$$

$$= (1 \otimes c^* \otimes d^*) \Big(\sum_{i,j=1}^{n} (e_j^* * e_i^*) \cdot m \otimes e_j \otimes e_i \Big) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \langle c^*, e_j \rangle \langle d^*, e_i \rangle (e_j^* * e_i^*) \cdot m =$$

$$\overset{(DB)}{=} \underline{(c^* * d^*) \cdot m.} \quad \text{și}$$

$$(1 \otimes c^* \otimes d^*) (1 \otimes \Delta) \circ \rho(m) =$$

$$= (1 \otimes c^* \otimes d^*) \Big(\sum_{i=1}^{n} e_i^* \cdot m \otimes e_{i(1)} \otimes e_{i(2)} \Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} e_i^* \cdot m \langle c^*, e_{i(1)} \rangle \langle d^*, e_{i(2)} \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} e_i^* \cdot m \langle c^* * d^*, e_i \rangle \overset{(DB)}{=} \underline{(c^* * d^*) \cdot m}$$

i.e. $(M, \rho) \in \mathcal{M}^C$.

- F și G sunt inverși unul altuia. Arăt că $G \circ F = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}^C}$. Fie $(M, \rho) \in \mathcal{M}^C$. Am de arătat că

$$\sum m_{<0>} \otimes m_{<1>} \overset{?}{=} \sum_{i=1}^{n} e_i^* \cdot m \otimes e_i$$

$$\mathrm{RHS} = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i^*, m_{<1>} \rangle m_{<0>} \otimes e_i \overset{(DB)}{=}$$

$$= \sum m_{<0>} \otimes m_{<1>}.$$

$F \circ G = \mathrm{Id}_{{}_{C^*}\mathcal{M}}$. Fie $(M, \cdot) \in {}_{C^*}\mathcal{M}$. Vrem:

$$c^* \cdot m \overset{?}{=} \sum_{i=1}^{n} \langle c^*, e_i \rangle e_i^* \cdot m$$

și e banal din nou folosim formula de bază duală $\blacksquare$

- **Module raționale**

Dacă C = coalgebră avem un functor fidel și full

$$F : \mathcal{M}^C \longrightarrow {}_{C^*}\mathcal{M}, \quad F(M, \rho) := (M, \dot{\rho})$$

unde $c^* \cdot m = \langle c^*, m_{<1>} \rangle m_{<0>}$.

Întrebare: Cine este "imaginea" functorului F?

i.e. care sunt C^*-modulele stângi a căror structură de C^*-modul provine din una de comodul implementată ca mai sus.