Dem 1) Banal: este proprietatea de adjuncție a produsului tensorial de module.

2) Fie $z = \sum_i f_i \otimes n_i \in \mathrm{Ker}(\varphi_{M,N})$.

Putem presupune că $\{n_i\}$ este liniar independentă peste k.

$\varphi_{M,N}(z) = 0 \Rightarrow \varphi_{M,N}(z)(m) = 0$, $(\forall)\, m \in M$

$\Rightarrow \sum_i f_i(m)\, n_i = 0$, $(\forall)\, m \in M \xrightarrow[\text{l. ind}]{\{n_i\}}$

$f_i(m) = 0$, $(\forall)\, m \in M$ și $i \Rightarrow f_i = 0$, $(\forall)\, i$

$\Rightarrow z = 0$.

3) Suficient să verif că $\rho_{M,N} \overset{?}{=} \gamma_{M,N} \circ \varphi_{M,N^*}$

($\Rightarrow \rho_{M,N}$ e injectivă), iar asta e banal:

$(\gamma_{M,N} \circ \varphi_{M,N^*})(f \otimes g)(m \otimes n) =$

$= \gamma_{M,N}\left(\varphi_{M,N^*}(f \otimes g)(m \otimes n)\right) =$

$= \varphi_{M,N^*}(f \otimes g)(m)(n) = f(m)\, g(n)$ și gata

$\boxtimes$

• Duala unei algebre finit dimensionale.

Fie $A = (A, M_A, u_A)$ o k-algebră a.î.

$\dim_k(A) < \infty$.

Fie $A^* := \mathrm{Hom}_k(A, k)$. Definim

$$\varepsilon_{A^*} : A^* \xrightarrow{u^*} k^* \xrightarrow[\sim]{\mathrm{can}} k$$

$$u^*(f) := f \circ u, \quad \mathrm{can}(g) := g(1_k)$$

$\varepsilon_{A^*} := \mathrm{can} \circ u^*$ i.e.

$$\varepsilon_{A^*}(f) = \mathrm{can}(f \circ u) = f(u(1_k)) = f(1_A)$$

i.e. în rezumat:

$$\underline{\varepsilon_{A^*} : A^* \longrightarrow k}, \quad \underline{\varepsilon_{A^*}(f) := f(1_A)} \qquad (1)$$

<u>Cum</u> definim $\Delta_{A^*} : A^* \longrightarrow A^* \otimes A^*$?

$$A^* \xrightarrow{M^*} (A \otimes A)^* \underset{\rho = \rho_{A,A}}{\overset{\rho^{-1}}{\longleftrightarrow}} A^* \otimes A^*$$

Cum A este finit dimensională $\Rightarrow \rho : A^* \otimes A^* \to (A \otimes A)^*$ este izomorfism i.e. $(\exists)\ \rho^{-1} : (A \otimes A)^* \longrightarrow A^* \otimes A^*$.

Definim

$$\underline{\Delta_{A^*} : A^* \to A^* \otimes A^*}, \quad \underline{\Delta_{A^*} := \rho^{-1} \circ (M_A)^*} \qquad (2)$$

Reamintim că $\rho(a^* \otimes b^*)(\alpha \otimes \beta) = a^*(\alpha)\, b^*(\beta)$ $(\forall)\ a^* \in A^*,\ b^* \in A^*,\ \alpha, \beta \in A$.

<u>Nu știm</u> încă cum arată ρ^{-1} ca să știm explicit cine este $\Delta_{A^*}(a^*)$, $a^* \in A^*$.

Formula importantă. Fie A = k-algebră finit dimensională şi $a^* \in A^*$. Atunci:

(3) $\Delta_{A^*}(a^*) = \sum a^*_{(1)} \otimes a^*_{(2)} \Longleftrightarrow \langle a^*, bc\rangle = \sum \langle a^*_{(1)}, b\rangle\langle a^*_{(2)}, c\rangle$

$(\forall)\ b, c \in A$, unde $\langle a^*, x\rangle = a^*(x) \in k$, $(\forall)\ x \in A$.

În adevăr, $\Delta_{A^*}(a^*) = \sum a^*_{(1)} \otimes a^*_{(2)} \Longleftrightarrow$

$(\rho \circ \Delta_{A^*})(a^*) = \rho\left(\sum a^*_{(1)} \otimes a^*_{(2)}\right) \Longleftrightarrow (\rho \circ \Delta_{A^*} = M$

$M_A^*(a^*) = \rho\left(\sum a^*_{(1)} \otimes a^*_{(2)}\right) \Longleftrightarrow$

$M_A^*(a^*)(b \otimes c) = \rho(-\text{"}-)(b \otimes c)$, $(\forall)\ b, c \in A$

$\Longleftrightarrow (M_A^*(a^*) = a^* \circ M_A)$ $\langle a^*, bc\rangle = \sum \langle a^*_{(1)}, b\rangle\langle a^*_{(2)}, c\rangle$

$(\forall)\ b, c \in A$.

Propoziţie Fie A = k-algebră f. dimensională, $\{e_1, \dots e_n\}$ o k-bază în A şi $\{e_1^*, \dots e_n^*\}$ baza duală, i.e. $e_i^*(e_j) := \delta_{ij}$, $(\forall)\ i, j = \overline{1, n}$. Atunci

$$\Delta_{A^*}(e_i^*) = \sum_{p,q=1}^{n} e_i^*(e_p e_q)\, e_p^* \otimes e_q^* \qquad (4)$$

$(\forall)\ i = \overline{1, n}$.

Dem: Folosim formula (3).

$$\Delta_{A^*}(e_i^*) = \sum_{p,q=1}^{n} e_i^*(e_p e_q)\, e_p^* \otimes e_q^* \overset{(3)}{\Longleftrightarrow} (\forall)\ a, b = \overline{1, n}$$

$$\langle e_i^*, e_a e_b\rangle = \sum_{p,q=1}^{n} \langle e_i^*, e_p e_q\rangle \underbrace{\langle e_p^*, e_a\rangle}_{\delta_{pa}} \underbrace{\langle e_q^*, e_b\rangle}_{\delta_{qb}}$$

$= \langle e_i^*, e_a e_b\rangle$, i.e. (4) are loc. $\blacksquare$

Propoziție (coalgebra duală unei algebre f. dim.)

Fie $A = (A, M_A, u_A)$ o k-algebră finit dimensională. Atunci $(A^*, \Delta_{A^*}, \varepsilon_{A^*})$ este coalgebră. În plus, dacă $f : A \to B$ e morfism de algebre finit dimensionale $\Longrightarrow$ $f^* : B^* \longrightarrow A^*$ e morfism de coalgebre.

Demonstrație. Aplicația

$$\tilde{\rho} : A^* \otimes A^* \otimes A^* \hookrightarrow (A \otimes A \otimes A)^*$$

$$\rho(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma)(a \otimes b \otimes c) := \langle \alpha, a\rangle \langle \beta, b\rangle \langle \gamma, c\rangle$$

este injectivă (prin inducție din prop. de alg. liniară)

Fie $a^* \in A^*$ și $\Delta_{A^*}(a^*) = \sum_i \alpha_i \otimes \beta_i \in A^* \otimes A^*$.

$(\Leftrightarrow \langle a^*, bc\rangle = \sum_i \langle \alpha_i, b\rangle \langle \beta_i, c\rangle$, $(\forall)\ b, c \in A)$.

Fie $\Delta_{A^*}(\alpha_i) = \sum_j \alpha'_{i,j} \otimes \alpha''_{i,j}$ și

$$\Delta_{A^*}(\beta_i) = \sum_j \beta'_{i,j} \otimes \beta''_{i,j}$$

Vrem: $(\Delta \otimes I) \circ \Delta_{A^*}(a^*) = (I \otimes \Delta) \circ \Delta_{A^*}(a^*)$ i.e.

$$\underbrace{\sum_{i,j} \alpha'_{i,j} \otimes \alpha''_{i,j} \otimes \beta_i}_{\text{not } LHS} \overset{?}{=} \underbrace{\sum_{i,j} \alpha_i \otimes \beta'_{i,j} \otimes \beta''_{i,j}}_{\text{not } RHS.}$$

Aplic $\tilde{\rho}$ pe ele:

$$\tilde{\rho}(LHS)(a \otimes b \otimes c) = \sum_{i,j} \underline{\alpha'_{i,j}(a)\, \alpha''_{i,j}(b)}\, \beta_i(c) =$$

$= ($ folosim formula (3) pentru $\Delta_{A^*}(\alpha_i))$

$= \sum_i \alpha_i(ab)\, \beta_i(c) = ((3)$ pentru $\Delta_{A^*}(a^*))$

$= \langle a^*, abc \rangle$. Analog,

$$\tilde{\rho}(RHS)(a \otimes b \otimes c) = \sum_{i,j} \alpha_i(a)\, \underline{\beta'_{i,j}(b)\, \beta''_{i,j}(c)}$$

$\overset{(3)}{=} \sum_i \alpha_i(a)\, \beta_i(bc) \overset{(3)}{=} \langle a^*, abc \rangle$, $(\forall) a, b, c \in A$.

i.e. $\tilde{\rho}(LHS) = \tilde{\rho}(RHS) \Rightarrow \Delta_{A^*}$ e coasociativă.

În plus,

$$\Big(\sum_i \varepsilon_{A^*}(\alpha_i)\, \beta_i\Big)(a) = \sum_i \alpha_i(1_A)\, \beta_i(a) \overset{(3)}{=} \langle a^*, a \rangle$$

i.e. $\sum_i \varepsilon_{A^*}(\alpha_i)\, \beta_i = a^*$ și analog

$$\sum_i \alpha_i\, \varepsilon_{A^*}(\beta_i) = a^*$$

i.e. $(A^*, \Delta_{A^*}, \varepsilon_{A^*})$ e o coalgebră.

<u>Remarcă</u> Putem arăta coasociativitatea lui Δ_{A^*} folosind și formula (4) pentru elementele din bază:

$$(\Delta\otimes I)\circ\Delta(e_i^*) = \sum_{p,q,r} e_i^*(e_p e_q e_r)\, e_p^*\otimes e_q^*\otimes e_r^*$$

$$= (1\otimes\Delta)\circ\Delta(e_i^*)$$

Fie acum $f : A \longrightarrow B$ morfism de k-algebre finit dimensionale. $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $f^* : B^* \longrightarrow A^*$ e morfism de coalgebre.

Fie $b^*\in B^*$. Atunci:

$$(\varepsilon_{A^*}\circ f^*)(b^*) = \varepsilon_{A^*}(f^*(b^*)) = \varepsilon_{A^*}(b^*\circ f) =$$

$$= (b^*\circ f)(1_A) = b^*(1_B) = \varepsilon_{B^*}(b^*)$$

i.e. $\varepsilon_{A^*}\circ f^* = \varepsilon_{B^*}$. A rămas de arătat că diagrama

$$\begin{tikzcd}
B^* \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\Delta_{B^*}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & A^* \arrow[d, "\Delta_{A^*}"] \\
B^*\otimes B^* \arrow[r, "f^*\otimes f^*"] & A^*\otimes A^*
\end{tikzcd}$$

e comutativă.

Fie $b^*\in B^*$ și $\Delta_{B^*}(b^*) = \sum_i \alpha_i\otimes\beta_i \in B^*\otimes B^*$

<u>Vrem</u>: $\Delta_{A^*}(f^*(b^*)) = \sum_i f^*(\alpha_i)\otimes f^*(\beta_i) \Leftrightarrow$

$$\Delta_{A^*}(b^*\circ f) = \sum_i \alpha_i\circ f\otimes\beta_i\circ f. \qquad (*)$$

Folosim din nou formula (3). Fie $b, c\in A$.

Formula (*) are loc $\Longleftrightarrow$

$$\langle b^*\circ f, bc\rangle = \sum_i \langle \alpha_i\circ f, b\rangle \langle \beta_i\circ f, c\rangle \Longleftrightarrow$$

$$\langle b^*, f(bc)\rangle = \sum_i \langle \alpha_i, f(b)\rangle \langle \beta_i, f(c)\rangle \Longleftrightarrow$$

$$\langle b^*, f(b)f(c)\rangle = \sum_i \langle \alpha_i, f(b)\rangle \langle \beta_i, f(c)\rangle$$

şi este OK căci $\Delta_{B^*}(b^*) = \sum_i \alpha_i \otimes \beta_i$ şi folosesc iar (3). Deci f e morfism de coalgebre. $\boxtimes$

Notând cu $\underline{k\text{-}Alg}^{f.d.}$ (resp. $\underline{k\text{-}CoAlg}^{f.d.}$) categoria algebrelor (resp. coalgebrelor) finit dimensionale am definit de fapt un functor contravariant

$$(-)^* : \underline{k\text{-}Alg}^{f.d.} \longrightarrow k\text{-}\underline{CoAlg}^{f.d.}$$

$$A \longmapsto A^*, \quad f \longmapsto f^*.$$

Teoremă (dualitatea algebre vs coalgebre)

Fie k = corp. Atunci perechea de functori

$$k\text{-}\underline{Alg}^{f.d.} \underset{(-)^*}{\overset{(-)^*}{\rightleftarrows}} k\text{-}\underline{CoAlg}^{f.d.} \quad (\simeq)$$

formează o dualitate de categorii.

Dem: Avem de arătat că $(-)^* \circ (-)^* \cong \mathrm{Id}$ pentru ambele categorii.

- Fie A = k-algebră finit dimensională. Arăt că

$$\theta_A : A \xrightarrow{\sim} A^{**}, \quad \theta_A(a)(a^*) := a^*(a),$$

$(\forall) a \in A$, $a^* \in A^*$ este <u>izomorfism natural</u> de k-algebre.

θ_A este izomorfismul canonic de spații vectoriale (duce baze în baze). Să arătăm că θ_A e morfism de algebre.

$$\theta_A(1_A)(a^*) = a^*(1_A) = \varepsilon_{A^*}(a^*) \text{ i.e.}$$

$$\theta_A(1_A) = \varepsilon_{A^*} = 1_{A^{**}}.$$

$$\theta_A(ab) \overset{?}{=} \theta_A(a) * \theta_A(b), \ (\forall) a, b \in A.$$

Fie $a^* \in A^*$ și $\Delta_{A^*}(a^*) = \sum_i \alpha_i \otimes \beta_i$. Atunci:

$$(\theta_A(a) * \theta_A(b))(a^*) = \sum_i \theta_A(a)(\alpha_i)\, \theta_A(b)(\beta_i)$$

$$= \sum_i \alpha_i(a)\beta_i(b) \overset{(3)}{=\!=} a^*(ab) =$$

$$= \theta_A(ab)(a^*) \text{ i.e. } \theta_A(a) * \theta_A(b) = \theta_A(ab)$$

i.e. θ_A e izo de algebre și în plus θ este izomorfism natural (Exercițiu!).

• Fie C = coalgebra finit dimensională. Arătăm că

$$\Theta_C : C \xrightarrow{\sim} C^{**}, \quad \Theta_c(c)(c^*) := c^*(c),$$

$(\forall)\ c \in C$, $c^* \in C^*$ este izomorfism natural de coalgebre. Avem de arătat că diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Theta_C"] \arrow[d, "\Delta_C"'] \arrow[dr, phantom, "="] & C^{**} \arrow[d, "\Delta_{C^{**}}"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\Theta_C \otimes \Theta_C"'] & C^{**} \otimes C^{**} \end{tikzcd}$$

este comutativă, i.e.

$$\Delta_{C^{**}}(\Theta_C(c)) \overset{?}{=} \sum \Theta_C(c_{(1)}) \otimes \Theta_C(c_{(2)}), \ (\forall)\ c \in C$$

Folosim din nou formula (3).

$$\Delta_{C^{**}}(\Theta_C(c)) = \sum \Theta_C(c_{(1)}) \otimes \Theta_C(c_{(2)}) \iff$$

$$\langle \Theta_C(c), c^* * d^* \rangle = \sum \langle \Theta_C(c_{(1)}), c^* \rangle \langle \Theta_C(c_{(2)}), d^* \rangle$$

$$\iff \langle c^* * d^*, c \rangle = \sum \langle c^*, c_{(1)} \rangle \langle d^*, c_{(2)} \rangle$$

$(\forall)\ c^*, d^* \in C^*$ și este OK. care este exact definiția produsului de convoluție.

A rămas de arătat că diagrama
$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\Theta_C"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] \arrow[rr, phantom, shift right=3, "="] & & C^{**} \arrow[dl, "\varepsilon_{C^{**}}"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

este comutativă.

$$\left(\varepsilon_{C^{**}} \circ \theta_C\right)(c) = \varepsilon_{C^{**}}\left(\theta_C(c)\right) =$$

$$= \theta_C(c)\left(1_{C^*}\right) = \theta_C(c)\left(\varepsilon_C\right) = \varepsilon_C(c),$$

i.e. $\varepsilon_{C^{**}} \circ \theta_C = \varepsilon_C$. Analog θ e și natural în C (exercițiu) ~~și~~ deci $(-)^*$, $(-)^*$ definesc o dualitate de categorii $\boxtimes$

<u>Observație</u> Am definit coalgebra duală unei algebre <u>finit dimensionale</u>. Se poate construi <u>duala finită</u> oricărei algebre A astfel:

$$A^\circ := \{ f \in A^* \mid \text{Ker}(f) \text{ conține un ideal de codimensiune finită} \}$$

Atunci A° are o structură de coalgebră [DNR, pg. 32] numită <u>duala finită</u> a lui A. Asocierea $A \longrightarrow A^\circ$ definește un functor

$$\underline{k\text{-Alg}} \xrightarrow{(-)^\circ} k\text{-}\underline{\text{CoAlg}}$$ care nu mai este o dualitate de categorii, ci doar un <u>adjunct</u> al functorului $(-)^* : k\text{-}\underline{\text{CoAlg}} \longrightarrow k\text{-}\underline{\text{Alg}}$

Această adjuncție s.n. <u>Kostant duality</u> [pentru detalii vezi teorema 6.0.5 din [Swe]].

Exemple și exerciții

1) Fie $A := k\langle x, y \mid x^2 = 0,\ y^2 = 0,\ yx = q\,xy \rangle$ unde $q \in k \setminus \{0\}$. Descrieți explicit coalgebra duală A^*.

Soluție O k-bază în A este $\{e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = y,\ e_4 = xy\}$. Fie $\{a := e_1^*,\ b := e_2^*,\ c := e_3^*,\ d := e_4^*\}$ baza duală care este k-bază în $C := A^*$.

$$\underline{\Delta(a)} = \Delta(e_1^*) \overset{(4)}{=} \sum_{p,q=1}^{4} e_1^*(e_p e_q)\, e_p^* \otimes e_q^* =$$

$$\overset{p=q=1}{=} e_1^* \otimes e_1^* = \underline{a \otimes a}$$

$$\underline{\varepsilon(a)} = \varepsilon(e_1^*) = e_1^*(1_A) = e_1^*(e_1) = \underline{1}$$

$$\underline{\Delta(b)} = \Delta(e_2^*) \overset{(4)}{=} \sum_{p,q=1}^{4} e_2^*(e_p e_q)\, e_p^* \otimes e_q^* =$$

$$= (\text{cînd } e_p e_q = e_2\ ?) = e_1^* \otimes e_2^* + e_2^* \otimes e_1^* =$$

$$= \underline{a \otimes b + b \otimes a}$$

$$\underline{\varepsilon(b)} = \varepsilon(e_2^*) = e_2^*(1_A) = e_2^*(e_1) = \underline{0}$$

Analog $\Delta(c) = a \otimes c + c \otimes a$, $\varepsilon(c) = 0$.

$$\underline{\Delta(d)} = \Delta(e_4^*) = \sum_{p,q=1}^{4} e_4^*(e_p e_q)\, e_p^* \otimes e_q^* =$$

$$= (\text{cînd } e_p e_q = e_4\ ?) =$$

$$= e_1^* \otimes e_4^* + e_4^* \otimes e_1^* + e_2^* \otimes e_3^* + q\, e_3^* \otimes e_2^* =$$

$$= a \otimes d + d \otimes a + b \otimes c + q\, c \otimes d.$$

$\underline{\varepsilon(d)} = \varepsilon(e_4^*) = e_4^*(e_1) = \underline{0}.$

i.e. $C := A^*$ este coalgebra de dimensiune 4 cu $\{a, b, c, d\}$ o k-bază și Δ și ε definite mai sus.

Exerciții 1) Descrieți explicit coalgebra duală pentru algebrele

$A = \left(\frac{a, b}{k}\right)$, (char $(k) \neq 2$) algebra de cuaternioni generalizați

$A = k[X]/(X^3)$, $k[X]/(X^n)$, $k[X, Y]/(XY, X^2 - Y^2)$

2) Arătați că există un izomorfism de coalgebre $M_n(k)^* \simeq M^n(k)$.

- Concepte de bază în teoria coalgebrelor.

Propoziție Fie C = coalgebră și C^* = algebra duală.
Atunci:

1) $C \in {}_{C^*}\mathcal{M}$ este un C^*-modul stâng via

$$\boxed{c^* \rightharpoonup c} := \sum \langle c^*, c_{(2)} \rangle c_{(1)} \qquad (1)$$

$(\forall)\ c \in C,\ c^* \in C^*$.

2) $C \in \mathcal{M}_{C^*}$ este un C^*-modul drept via

$$\boxed{c \leftharpoonup c^*} := \sum \langle c^*, c_{(1)} \rangle c_{(2)} \qquad (2)$$

$(\forall)\ c \in C,\ c^* \in C^*$.

3) $(C, \rightharpoonup, \leftharpoonup) \in {}_{C^*}\mathcal{M}_{C^*}$ este un (C^*-C^*)-bimodul

Dem: 1) Fie $c \in C$, $c^*, d^* \in C^*$. Atunci:

$$1_{C^*} \rightharpoonup c = \varepsilon_C \rightharpoonup c = \sum \varepsilon(c_{(2)}) c_{(1)} \overset{(CU)}{=} c \text{ și}$$

$$c^* \rightharpoonup (d^* \rightharpoonup c) = c^* \rightharpoonup (\langle d^*, c_{(2)} \rangle c_{(1)}) =$$

$$= \langle d^*, c_{(2)} \rangle \langle c^*, c_{(1)(2)} \rangle c_{(1)(1)} =$$

$$= \langle d^*, c_{(3)} \rangle \langle c^*, c_{(2)} \rangle c_{(1)} \text{ și}$$

$$(c^* d^*) \rightharpoonup c = \langle c^* d^*, c_{(2)} \rangle c_{(1)} =$$

$$= \langle c^*, c_{(2)(1)} \rangle \langle d^*, c_{(2)(2)} \rangle c_{(1)} =$$

$$= \langle c^*, c_{(2)} \rangle \langle d^*, c_{(3)} \rangle c_{(1)} \neq \text{ok}$$ (sumarea e presupusă)

2) Analog.

3) $(c^* \rightharpoonup c) \leftharpoonup d^* = \langle c^*, c_{(2)}\rangle c_{(1)} \leftharpoonup d^*$

$= \langle c^*, c_{(2)}\rangle \langle d^*, c_{(1)(1)}\rangle c_{(1)(2)} =$

$= \langle c^*, c_{(3)}\rangle \langle d^*, c_{(1)}\rangle c_{(2)}$, și

$c^* \rightharpoonup (c \leftharpoonup d^*) = c^* \rightharpoonup \langle d^*, c_{(1)}\rangle c_{(2)} =$

$= \langle d^*, c_{(1)}\rangle \langle c^*, c_{(2)(2)}\rangle c_{(2)(1)} =$

$= \langle d^*, c_{(1)}\rangle \langle c^*, c_{(3)}\rangle c_{(2)}$ și o.k. ▨

<u>Definiție</u>: Fie $C = (C, \Delta, \varepsilon)$ o coalgebră. Un k-submodul $D \leq_k C$ al lui C s.n. <u>subcoalgebră</u> dacă $\Delta(D) \subseteq D \otimes D$.

Dacă D este subcoalgebră $\Rightarrow (D, \Delta_{|D}, \varepsilon_{|D})$ este o coalgebră.

<u>Observații</u>: 1) Fie $(C_i)_{i \in I}$ o familie de subcoalgebre în $C \Longrightarrow \sum_{i \in I} C_i$ și $\bigcap_{i \in I} C_i$ este o <u>subcoalgebră</u> în C. (Exercițiu!)

2) În categoria <u>k-CoAlg</u> există <u>coproduse</u>.

În adevăr, fie $(C_i)_{i \in I}$ o familie de coalgebre și $\bigoplus_{i \in I} C_i$ suma lor directă în ${}_k\mathcal{M}$.

Fie $\alpha_i : C_i \hookrightarrow \bigoplus_{i\in I} C_i$ incluziunile canonice

și diagrama:

$$\begin{tikzcd} C_i \arrow[r, hook, "\alpha_i"] \arrow[d, "\Delta_i"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \bigoplus_{i\in I} C_i \arrow[d, dashed, "(\exists!)\Delta"] \\ C_i\otimes C_i \arrow[r, hook, "\alpha_i\otimes\alpha_i"] & \left(\bigoplus_{i\in I} C_i\right)\otimes\left(\bigoplus_{i\in I} C_i\right). \end{tikzcd}$$

Din definiția coprodusului în $\mathcal{M}_k$ $\Longrightarrow$

$(\exists!)\ \Delta : \bigoplus_{i\in I} C_i \longrightarrow \left(\bigoplus_{i\in I} C_i\right)\otimes\left(\bigoplus_{i\in I} C_i\right)$ k-liniară

a.î. diagrama e comutativă (asta va asigura că α_i e morfism de coalgebre), i.e.

$\Delta|_{C_i} = (\alpha_i\otimes\alpha_i)\circ\Delta_i$, $\Rightarrow$ Δ e coasociativă

căci are este restricția ei la componentele omogene

Fie
$$\begin{tikzcd} C_i \arrow[r, hook, "\alpha_i"] \arrow[d, "\varepsilon_i"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \bigoplus_{i\in I} C_i \arrow[dl, dashed, "(\exists!)\varepsilon"] \\ k & \end{tikzcd}$$

Din nou din definiția coprodusului $\Rightarrow$ $(\exists!)\ \varepsilon : \bigoplus_{i\in I} C_i \longrightarrow k$

k-liniară a.î. $\varepsilon|_{C_i} = \varepsilon_i \Rightarrow \varepsilon$ e counitate

pentru Δ, căci are este restricția lor.

$\Rightarrow \left(\bigoplus_{i\in I} C_i, \Delta, \varepsilon\right)$ e un coprodus al coalgebrelor

în categoria k-<u>CoAlg</u>.

3) Dacă $X \leq_k C$ e k-submodul în C notăm cu

$\langle X\rangle := \bigcap_{\substack{D \text{ subcoalgebră în } C\\ D\supseteq X}} D$ s.n. <u>subcoalgebra generată de X</u>.

Def: Fie $C = (C, \Delta, \varepsilon)$ o coalgebră. Un k-submodul I s.n. coideal al lui C dacă $\Delta(I) \subseteq I \otimes C + C \otimes I$ și $\varepsilon(I) = 0$.

- Două leme de algebră liniară și teorema fundamentală pentru coalgebre

Lema 1: Fie k = corp, V și W k-spații vectoriale și $X \leq_k V$, $Y \leq_k W$. Atunci

$$X \otimes Y = (X \otimes W) \cap (V \otimes Y)$$

Lema 2: Fie $f : V_1 \to V_2$, $g : W_1 \to W_2$ aplicații k-liniare de spații vectoriale. Atunci

$$\mathrm{Ker}(f \otimes g) = \mathrm{Ker}(f) \otimes W_1 + V_1 \otimes \mathrm{Ker}(g)$$

Pentru demonstrație vezi [Sweedler] sau [Dăscălescu, Năstăsescu, Raianu].

Teoremă (teorema fundamentală / de finitudine pt. coalgebre)
Fie C o coalgebră și $c \in C$. Atunci, există $D \subseteq C$ o subcoalgebră finit dimensională a.i. $c \in D$. În particular, $\langle c \rangle$ este subcoalgebră finit dimensională.

<u>Demonstratie</u> :

Fie $\Delta_2(c) = (\Delta \otimes I)\Delta(c) = \sum_{i,j} c_i \otimes x_{ij} \otimes d_j$ (*)

cu $\{c_i\}$ si $\{d_j\}$ <u>liniar independente</u> $/k$

(pot face asta caci k = corp : iau de exemplu cea scurta scriere a lui $\Delta_2(c)$).

Fie X := k - subspatiu lui C generat de $\{x_{ij}\}_{(i,j)}$

<u>Afirm</u> : $c \in X$ si X este subcolgebra in C (evident X e finit dimensionala).

Aplic $\varepsilon \otimes I \otimes \varepsilon$ in relatia (*) si tin cont de formula

$$\sum \varepsilon(c_{(1)})\, c_{(2)}\, \varepsilon(c_{(3)}) = c \quad .$$ Obtinem :

$$c = \sum_{i,j} \varepsilon(c_i)\, x_{ij}\, \varepsilon(d_j) \implies \underline{c \in X}.$$

In relatia (*) aplicam Δ pe prima si pe a doua pozitie si tin cont de coasociativitatea generalizata. obtinem :

$$\sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)} \otimes c_{(4)} = \sum_{i,j} \underline{\Delta(c_i) \otimes x_{ij} \otimes d_j} =$$

$$= \sum_{i,j} \underline{c_i \otimes \Delta(x_{ij}) \otimes d_j}$$

Cum $\{d_j\}$ este liniar independenta $\implies$

$$\sum_i \Delta(c_i)\otimes x_{ij} = \sum_i c_i \otimes \underline{\Delta(x_{ij})} \in C\otimes C\otimes X$$

$(\forall)\ j$. Cum $\{c_i\}_i$ este liniar independent

$\Longrightarrow \Delta(x_{ij}) \in C\otimes X$, $(\forall)\ i,j$ i.e.

$$\Delta(X) \subseteq C\otimes X.$$

Analog, glisând Δ pe a doua și pe ultima poziție $\Longrightarrow$ $\Delta(X) \subseteq X\otimes C$.

$\Longrightarrow \Delta(X) \subseteq (C\otimes X)\cap(X\otimes C) \overset{(L1)}{=} X\otimes X$, i.e.

X este subcoalgebră. ∎

- Coalgebre factor; proprietatea de universalitate și teorema fundamentală de izomorfism pentru coalgebre

Propoziție: Fie $f: C \to D$ un morfism de coalgebre. Atunci $\mathrm{Im}(f)$ este subcoalgebră în D și $\mathrm{Ker}(f)$ este coideal în C. În particular, $\mathrm{Ker}(\varepsilon_C)$ este coideal în C.

Dem: Cum f e morfism de coalgebre diagramele următoare sunt comutative:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C\otimes C \arrow[r, "f\otimes f"] & D\otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

$$\Delta_D(\mathrm{Im}(f)) = \Delta_D(f(C)) = (f\otimes f)(\Delta_C(C)) \subseteq$$

$$\subseteq (f\otimes f)(C\otimes C) \subseteq f(C)\otimes f(C) = \mathrm{Im}(f)\otimes \mathrm{Im}(f)$$

i.e. $\mathrm{Im}(f)$ e subcolgebră în D.

- $\mathrm{Ker}(f)$ e coideal în C.

$$f(\mathrm{Ker}(f)) = 0 \Rightarrow \Delta_D(f(\mathrm{Ker}(f))) = 0 \Rightarrow$$

$$(f \otimes f)\Delta_C(\mathrm{Ker}(f)) = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\Delta_C(\mathrm{Ker}(f))} \subseteq \mathrm{Ker}(f \otimes f) = \underline{\mathrm{Ker}(f) \otimes C + C \otimes \mathrm{Ker}(f)}$$

și $\underline{\varepsilon_C(\mathrm{Ker}(f))} = \varepsilon_D(f(\mathrm{Ker}(f))) = \varepsilon_D(0) = \underline{0}$.

i.e. $\mathrm{Ker}(f)$ este coideal. $\boxtimes$

<u>Teorema</u> (coalgebra factor, prop. de universalitate, teorema fundamentală de izomorfism)

Fie C = coalgebră, I coideal în C și $\pi : C \to C/_I$ proiecția canonică. Atunci:

1) $(\exists!)$ o structură de coalgebră pe $C/_I$ a.î. $\pi : C \to C/_I$ este morfism de coalgebre. $C/_I$ s.n. <u>coalgebra factor</u> a lui C prin I.

2) (<u>P.U.</u>) Dacă $f : C \to D$ e morfism de coalgebre a.î. $\mathrm{Ker}(f) \supseteq I \Rightarrow (\exists!)\ \bar{f} : C/_I \to D$ morfism de coalgebre a.î. $\bar{f} \circ \pi = f$.

3) (<u>T.F.I.</u>) Dacă $f : C \to D$ e morfism de coalgebre atunci

$$\tilde{f} : C/_{\mathrm{Ker}(f)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(f),\ \tilde{f}(\hat{c}) := f(c),\ (\forall)\ \hat{c} \in C/_{\mathrm{Ker}(f)}$$

este izomorfism de coalgebre.

<u>Demonstrație</u> 1) $(\pi\otimes\pi)(\Delta(I)) \subseteq (\pi\otimes\pi)(I\otimes C + C\otimes I)$

$=0$, i.e. $\underline{\mathrm{Ker}\,((\pi\otimes\pi)\circ\Delta) \supseteq I} \Longrightarrow$

$(\exists!)\ \bar\Delta : C/_I \to C/_I \otimes C/_I$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dr, phantom, "="] & C/_I \arrow[d, dashed, "(\exists!)\bar\Delta"] \\ C\otimes C \arrow[r, "\pi\otimes\pi"] & C/_I\otimes C/_I \end{tikzcd}$$

k-liniară și diagrama e comutativă i.e.

$\bar\Delta(\hat c) = \sum \hat c_{(1)} \otimes \hat c_{(2)}$, $(\forall)\, c\in C$.

Evident $\bar\Delta$ este coasociativă căci era Δ.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varepsilon_C"'] & C/_I \arrow[dl, dashed, "(\exists!)\bar\varepsilon"] \\ k & \end{tikzcd}$$

Cum $\varepsilon(I)=0 \Rightarrow \mathrm{Ker}(\varepsilon_C) \supseteq I$

$\Rightarrow (\exists!)\ \bar\varepsilon : C/_I \to k$ k-liniară

a.î. $\bar\varepsilon \circ \pi = \varepsilon_C$, i.e.

$\bar\varepsilon(\hat c) = \varepsilon_C(c)$, $(\forall)\, c\in C$. În plus,

$\sum \bar\varepsilon(\hat c_{(1)})\,\hat c_{(2)} = \pi\left(\sum \varepsilon(c_{(1)})\,c_{(2)}\right) = \pi(c) = \hat c$,

i.e. $(C/_I, \bar\Delta, \bar\varepsilon)$ e coalgebră, și π e morfism de coalgebre.

2)
$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & C/_I \arrow[dl, dashed, "(\exists!)\bar f"] \\ D & \end{tikzcd}$$

Din P.U. a ${}_k\mathcal{M}$ pentru module factor $\Longrightarrow$

$(\exists!)\ \bar f : C/_I \to D$, k-liniară

a.î. $\bar f(\hat c) = f(c)$, $(\forall)\, c\in C$. Arătăm că $\bar f$ este morfism de coalgebre. Fie $\hat c \in C/_I$. Atunci:

$(\Delta_D\circ \bar f)(\hat c) = \Delta_D(f(c)) = \sum f(c)_{(1)} \otimes f(c)_{(2)} \underset{f\text{ e colg. map.}}{=}$

$= \sum f(c_{(1)}) \otimes f(c_{(2)}) = \sum \bar f(\hat c_{(1)}) \otimes \bar f(\hat c_{(2)})$

$= (\bar f \otimes \bar f)\circ \bar\Delta(\hat c)$ și

$$\varepsilon_D(\overline{f}(\hat{c})) = \varepsilon_D(f(c)) = \varepsilon_C(c) = \overline{\varepsilon}(\hat{c}),$$

i.e. $\overline{f}$ e morfism de coalgebre.

3) Din a) şi b) $\boxtimes$

Exerciţiu: Categoria k-CoAlg are coegalizatori.

Indicaţie: Fie $C \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} D$ şi $I := \mathrm{Im}(f-g)$ care e coideal în D. $D \xrightarrow{\pi} D/I$, π = proiecţia can.

$\overset{?}{\Longrightarrow} (D/I, \pi)$ este coegalizator pentru $C \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} D$. $\boxtimes$

Exerciţiu: Categoria k-CoAlg are egalizatori.

Indicaţie: Fie $C \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} D$ morfisme de coalgebre şi

$$E := \{ c \in C \mid \sum c_{(1)} \otimes f(c_{(2)}) \otimes c_{(3)} = \sum c_{(1)} \otimes g(c_{(2)}) \otimes c_{(3)} \}$$

Atunci E e subcoalgebră în C şi (E, i) e un egalizator al diagramei $(\exists!)\ C \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} D$.

Altfel: Fie $X := \{ c \in C \mid f(c) = g(c) \}$ şi

$$E' := \sum_{\substack{F \subseteq C \text{ subcoalg.} \\ F \subseteq X}} F$$

Atunci (E', i) e egalizator. $\boxtimes$

Temă REFERAT (cofree coalgebre)

Fie V un k-spațiu vectorial. S.n. <u>cofree coalgebră</u> peste V o pereche $(C(V), p)$, unde $C(V)$ este coalgebră, $p : C(V) \longrightarrow V$ este k-liniară a.î.

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl, dashed, "(\exists!)\,\overline{f}"'] \arrow[d, "f"] \\ C(V) \arrow[r, "p"'] & V \end{tikzcd}$$

$(\forall)\, D =$ coalgebră, $(\forall)\, f : D \to V$ k-liniară $(\exists!)\, \overline{f} : D \to C(V)$ morfism de coalgebre a.î.

$$p \circ \overline{f} = f.$$

Arătați că pentru orice V există o cofree coalgebră peste V. (vezi [Sw], [Abe], [DNR]).

<u>Elemente grupale ale unei coalgebre.</u>

<u>Definiție</u> Fie $C =$ coalgebră. Un element $g \in C$ s.n. <u>element grupal</u> dacă $g \neq 0$ și $\Delta(g) = g \otimes g$.

$$G(C) := \{ g \in C \mid g \text{ element grupal} \}.$$

<u>Obs</u>: $g \in G(C) \Longleftrightarrow$ <u>$\Delta(g) = g \otimes g$ și $\varepsilon(g) = 1$</u>

„$\Longleftarrow$" evidentă

„$\Longrightarrow$" $\Delta(g) = g \otimes g \overset{(CU)}{\Longrightarrow} g = \varepsilon(g)\, g \Longrightarrow \varepsilon(g) = 1,$ căci $k =$ corp. ☒

<u>Propoziție</u> Fie $C =$ coalgebră peste un corp k. Atunci elementele lui $G(C)$ sunt <u>liniar independente</u> peste k.

Dem: Dacă $g \in G(C) \Rightarrow \{g\}$ e liniar independentă $/k$ ($g \neq 0$). Pp. prin absurd că există elemente în $G(C)$ care sunt liniar dependente și fie $n \in \mathbb{N}^*$ cel mai mic număr natural a.î. există elementele $g, g_1, \dots, g_n \in G(C)$ distincte a.î.

$$g = a_1 g_1 + \dots + a_n g_n, \quad a_i \in k \; (\forall) i = \overline{1,n}$$

Dacă $n = 1 \Rightarrow g = a_1 g_1 \overset{\varepsilon}{\Longrightarrow} a_1 = 1 \Rightarrow g = g_1$ fals

Deci $n \geq 2$. Din alegerea lui n avem că $a_i \neq 0$ $(\forall)\, i = \overline{1,n}$

$$g \otimes g = \Delta(g) = \sum_{i=1}^{n} a_i \Delta(g_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i g_i \otimes g_i$$

$$\Longrightarrow \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \, g_i \otimes g_j = \sum_{i=1}^{n} a_i \, g_i \otimes g_i$$

Din alegerea lui n $\{g_1, \dots, g_n\}$ e liniar independentă $/k \Longrightarrow (\forall)\, i \neq j$ avem că $a_i a_j = 0$, fals! ☐

Exemple

1) Fie X = mulțime și $C = k[X]$ coalgebra grupală. Atunci $G(k[X]) = X$.

În adevăr, $X \subseteq G(k[X])$, căci $\Delta(x) = x \otimes x$.

Reciproc, fie $g \in G(k[X]) \Longrightarrow$

$g = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \Longrightarrow$ (propoziția precedentă) $n = 1$

și $g = x_1$. ☐

2) Fie A = k-algebră finit dimensională. Atunci

$$\underline{G(A^*) = \mathrm{Hom}_{k\text{-}\underline{Alg}}(A, k)}$$

În adevăr, fie $0 \neq f \in A^*$. Atunci

$\Delta_{A^*}(f) = f \otimes f \overset{(3)}{\Longleftrightarrow} \langle f, bc\rangle = \langle f, b\rangle\langle f, c\rangle$

$(\forall)\ b, c \in A$ i.e. f e multiplicativă. În plus,

$\varepsilon_{A^*}(f) = 1_k \Rightarrow f(1_A) = 1_k$ i.e. f e morfism

de algebre.

<u>Consecință</u>: Dacă $n \geq 2 \Rightarrow \underline{G(M^n(k)) = \phi}$

În adevăr, $G(M^n(k)) = G((M_n(k))^*) =$

$= \mathrm{Hom}_{k\text{-}\underline{Alg}}(M_n(k), k) = \phi$, pentru $n \geq 2$.

<u>Exerciții</u> 1) Calculați elementele grupale din trigonometrica coalgebră

2) X, Y = mulțimi și $k[X]$, $k[Y]$ coalgebrele grupale

$\Rightarrow \mathrm{Hom}_{k\text{-}\underline{CoAlg}}(k[X], k[Y]) \simeq \mathrm{Hom}_{\underline{Set}}(X, Y)$

<u>Propoziție</u> Fie C = coalgebră. Atunci $G(C)$ e în <u>bijecție</u> cu <u>subcoalgebrele de dimensiune 1</u> ale lui C.

<u>Dem</u> Dacă $g \in G(C) \Rightarrow kg = \{\alpha g \mid \alpha \in k\}$

este subcoalgebră de dimensiune 1 căci

$\Delta(\alpha g) = \alpha g \otimes g \in kg \otimes kg$.

Reciproc,

Fie $D \subseteq C$ subcoalgebră de dimensiune 1 și fie $0 \neq d \in D \implies D = kd$. Cum $\Delta(D) \subseteq D \otimes D$ $\implies (\exists)\ \lambda \in k,\ \lambda \neq 0$ a.i. $\Delta(d) = \lambda d \otimes d$

$\implies \Delta(\lambda d) = \lambda d \otimes \lambda d$, i.e. $\lambda d \in G(C) \cap D$

$\implies G(C) \cap D = \{\lambda d\}$ (dacă D ar conține două elemente grupale ele ar fi liniar independente fals! căci D are dimensiunea 1). În felul acesta funcțiile

$g \longmapsto kg$, $D \longrightarrow D \cap G(C)$ sunt inverse una alteia între $G(C)$ și subcoalgebrele de dimensiune 1. ∎